

Т Р У Д Ы
ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. Жуковского

Выпуск 317

А. А. КОСМОДЕМЬЯНСКИЙ

ВИХРЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ



ИЗДАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Москва

1937

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Основной целью данной работы является подсчет той части лобового сопротивления, которая обусловлена закономерными вихреобразованиями за кормовой частью движущегося в воздухе тела. Конкретные числовые расчеты проведены, главным образом, для области ламинарного течения, хотя приводимые формулы могут с успехом применяться и для турбулентной области течений.

Автор подсчитывает вихревое сопротивление круглого цилиндра для ламинарной, переходной и турбулентной областей течения, решает задачу о вихревом сопротивлении серии эллиптических цилиндров и серии симметричных крыльев типа Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина. Так как в предлагаемом методе приходится заимствовать из эксперимента положение точки минимума давлений (или точки срыва), то автор сравнил много экспериментальных данных и отобрал, как кажется, наиболее надежные. Предлагаемый и развиваемый здесь метод подсчета вихревого сопротивления основывается на трех гипотезах:

- а) ширина вихревой зоны за кормовой частью тела равна расстоянию между точками срыва струй;
- б) скорость вполне сформировавшегося вихря (вихря, имеющего максимальную циркуляцию) за телом направлена по скорости невозмущенного потока;
- в) положение точки минимума давлений реального потока (или точки срыва струй) дано.

В конце работы показано, что, пользуясь некоторыми результатами, полученными в этой работе, можно решить дополнительные задачи:

- 1) подсчитать период схода вихрей с рассматриваемых контуров и тем самым указать частоту возмущающей гидродинамической силы, которая и является решающей при возникновении вибраций в случае нулевой подъемной силы;
- 2) зная точку минимума давлений, найти всю картину распределения давлений по передней части контура до точки срыва струй.

Изложенные в работе приемы достаточно корректны и очень просты. Автор надеется, что авиационные работники извлекут из полученных результатов некоторые полезные сведения о лобовом сопротивлении теоретических профилей.

Отв. ред. А. К. Мартынов

Техн. редактор И. К. Богданов

Сдано в набор 13/V 1937 г.

Подписано к печ. 22/VI 1937 г.

3⁵/₈ печ. листа

Колич. печ. знаков в листе 66 000

Формат бум. 70×108¹/₁₆

Уполн. Мособлгорлита № Б—3021

Тираж 750.

Заказ тип. № 164

Типография ЦАГИ—Москва, ул. Радио, 17.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Работа т. Космодемьянского посвящена теоретической разработке чрезвычайно сложного и важного вопроса о подсчете части лобового сопротивления, вызванного вихреобразованиями сзади движущегося тела. Исследование Космодемьянского представляет собою дополнение к известным результатам Кармана о вихревых дорожках и вызываемом ими сопротивлении. Изложению основных результатов теории Кармана посвящено начало работы (стр. 4—11).

В формулу Кармана входят параметры (\bar{u} и l), определяемые формой обтекаемого тела. Их определение и составляет основную задачу рассматриваемой работы. Автор решает эту задачу, делая ряд предположений о характере вихревой дорожки; в частности, оказывается необходимым знать (из экспериментов) или положение точки минимума давлений на поверхности обтекаемого тела или положение точки срыва. Таким образом, работа не дает полного теоретического решения поставленной задачи. Тем не менее результаты, полученные автором, считаю весьма интересными, так как автор указывает возможность, пользуясь весьма ограниченным экспериментальным материалом, дать достаточно полное решение поставленной им задачи в условиях ламинарного и турбулентного течения.

Развитый автором метод применен им к определению сопротивления эллиптических цилиндров и симметричных крыльев типа инверсии параболы; попутно дается сравнение опытных данных с данными, полученными из теоретических соображений.

В. Голубев

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ КАРМАНА

Задача о подсчете вихревого сопротивления есть по существу задача реальной жидкости и точное решение этой проблемы возможно только лишь при решении основных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости — уравнений Навье-Стокса, причем для случая нестационарного движения. С физической точки зрения образование вихрей за кормовой частью тела связано с развитием пограничного слоя на теле. Решения для нестационарного движения пограничного слоя, развитые в работах Блазиуса¹ (круговой цилиндр) и Больце² (шар), не дают, однако, возможности и достаточных указаний для решения задачи о подсчете циркуляции образующихся вихрей. Вопросы точных решений дифференциальных уравнений в настоящее время наталкиваются на непреодолимые математические трудности, и примерами таких точных решений являются чрезвычайно простые случаи течений, малоинтересные для авиационной практики³.

Общий характер вихреобразований за плохообтекаемыми телами до настоящего времени изучен недостаточно, особенно при скоростях, интересующих современного авиационного инженера. Большинство опытов, результаты которых мы приведем ниже, ставились в гидроканалах для низких чисел Рейнольдса. Закономерности, полученные из этих данных, могут и не соблюдаться при больших числах Рейнольдса. Мы можем, однако, выявить из имеющегося экспериментального материала следующие характерные особенности вихреобразований за плохообтекаемыми телами:

а) Наблюдается образование дискретных вихрей, а не поверхностей раздела синусоидального типа, которые наблюдаются за хорошо обтекаемыми телами.

б) Дискретные вихри возникают за кормовой частью плохообтекаемых тел периодически. При заданной скорости потока на бесконечности U_0 (или скорости тела в покоящейся жидкости) каждый новый вихрь отходит от тела в вполне определенный промежуток времени, имея некоторую циркуляцию. Для тел с осевой симметрией (в условиях плоскопараллельного течения) мы должны, очевидно, принять, что поочередно сходящие вихри имеют одинаковую величину циркуляции.

в) Система вихрей за телом располагается в определенном порядке, который называют „шахматным“, „ассимметричным“ и т. п. Симметричных систем вихрей за движущимся телом в природе не существует, исключая начало движения, когда за кормой образуется пара симметрично расположенных вихрей.

¹ H. Blasius. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Zeits. für. Math. und Phys. Bd. 56, S. 1—37. 1908.

² E. Boltze. Grenzschichten an Rotationskörper in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Dissertation — Göttingen. 1908.

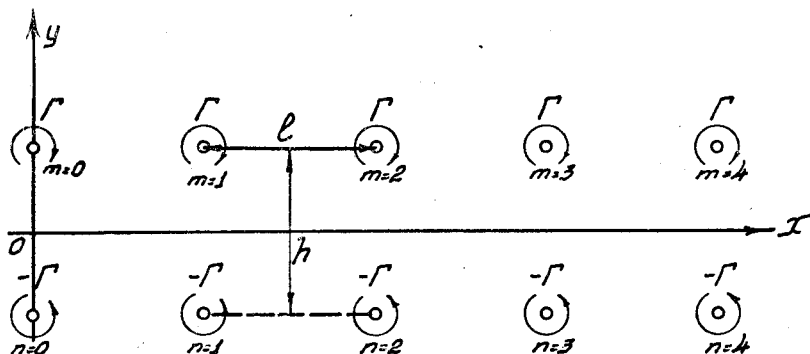
³ К. Страхович. Классическая гидромеханика вязкой жидкости. Обзорная статья в „Прикладная математика и механика“, том II-й, вып. I и II. 1934—1935.

Сложность явления, неясность его протекания в деталях, естественно, наводят на мысль о приближенной постановке задачи о вихревых системах.

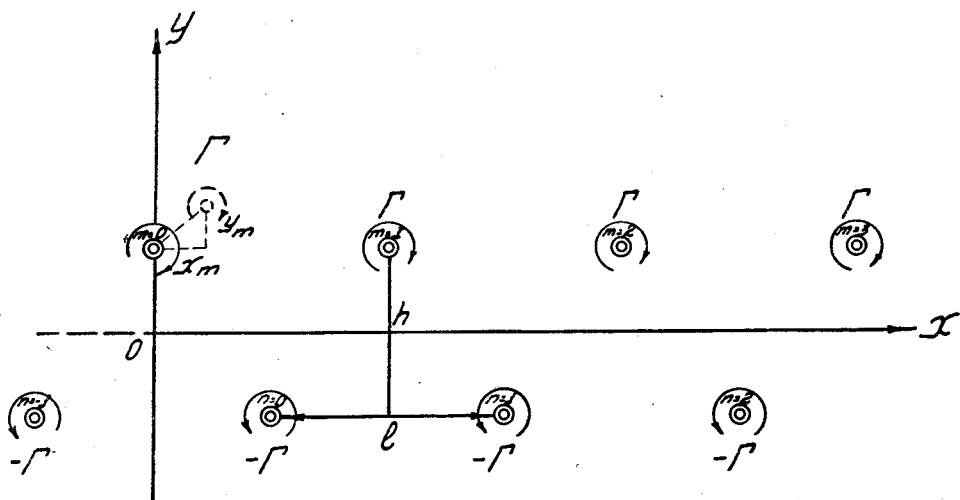
Первая и весьма плодотворная попытка схематической постановки задачи принадлежит Карману, который, оставаясь в рамках теории идеальной жидкости, правильно оценил сложный процесс образования вихрей за телом.

Системы вихрей, которые образуются за плохообтекаемыми телами, имеют вполне закономерное расположение, поэтому первый вопрос, который был поставлен Карманом, относится к изучению необходимых и достаточных условий устойчивости вихрей¹.

Карман исследовал бесконечные вихревые дорожки симметричного (фиг. 1) и шахматного (фиг. 2) типов. Если обозначить h — расстояние



Фиг. 1.



Фиг. 2.

между вихревыми цепочками, l — расстояние между двумя последовательными вихрями и \bar{u} — скорость вихревой цепочки, как целого (эта скорость обуславливается взаимодействием вихрей и для шахматной дорожки

$$\bar{u} = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{tg} h(s\pi), \quad (1)$$

¹ В полной мере этот вопрос не был решен Карманом, и точное решение этой задачи нам неизвестно.

где

$$s = \frac{h}{l} \Big),$$

то оказывается, что симметричные дорожки неустойчивы, а шахматные устойчивы при определенном отношении $\frac{h}{l}$.

Карман нашел, что если ограничиться первыми степенями малых возмущений, то для устойчивости шахматных дорожек необходимо, чтобы

$$\frac{h}{l} = 0,2806. \quad (2)$$

Многочисленные эксперименты, проведенные почти во всех странах, несомненно подтверждают этот замечательный результат Кармана.

Мы дадим числовые результаты некоторых из такого рода экспериментов без описания аппаратуры и деталей исследований, отсылая интересующихся к соответствующим оригинальным работам. Известно, что Карман и Рубах¹ провели первую экспериментальную проверку теоретических результатов в гидротке при $2000 \leq Re \leq 3000$ обычным визуальным методом. Поверхность воды посыпалась тонким алюминиевым порошком, и вихри, образующиеся при движении тела, фотографировались. Данные опытов приведены в таблице а. (все длины даны в сантиметрах).

Таблица а

	h	l	$\frac{h}{l}$	$\left(\frac{\bar{u}}{U_0}\right)$
Пластина ширины 1,75 см.	3,00	9,80	0,305	0,20
Круглый цилиндр диам. 1,5 см. . .	1,80	6,40	0,280	0,14

Как видно, теоретические результаты подтверждаются очень хорошо, по детали экспериментирования авторами описаны очень скупо.

Весьма подробные исследования с совершенной аппаратурой были проведены в период с 1928 до 1931 г. Е. Тейлером². Таблицы b , c , d , e , дают весьма любопытные результаты и детали поведения вихревых дорожек за плохообтекаемыми препятствиями.

Таблица б

Круглый цилиндр $d = 3,58$ см.

$$U_0 = 202,7 \text{ см/сек. } Re = 4,900 = \frac{U_0 d}{\nu}.$$

(опыты ставились в потоке воздуха, размеры в сантиметрах)

Расстояние за цилиндром в сантиметрах	h	l	$\frac{h}{l}$	$\frac{\bar{u}}{U_0}$
11,50	3,80	13,00	0,293	0,358
16,50	4,25	13,50	0,314	0,334
25,00	4,80	14,00	0,342	0,308
31,50	5,00	14,75	0,339	0,272

Таблица с

Круглый цилиндр $d = 2,5$ см. $Re = 3,820$

Расстояние за цилиндром в сантиметрах	h	l	$\frac{h}{l}$	$\frac{\bar{u}}{U_0}$
10,0	3,00	9,80	0,306	0,339
14,0	3,45	10,30	0,335	0,302
21,0	3,50	10,80	0,325	0,270
26,0	3,50	10,80	0,325	0,270
31,1	3,60	11,20	0,321	0,244

¹ Kármán Th. and Rubach H. Über den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes. Physikalische Zeitschr. 13, 1912. Стр. 49.

² E. Tyber. Vortex Formation behind Obstacles of Various Sections. Philosph. Mag. April 1931.

где

$$s = \frac{h}{l} \Bigg),$$

то оказывается, что симметричные дорожки неустойчивы, а шахматные устойчивы при определенном отношении $\frac{h}{l}$.

Карман нашел, что если ограничиться первыми степенями малых возмущений, то для устойчивости шахматных дорожек необходимо, чтобы

$$\frac{h}{l} = 0,2806. \quad (2)$$

Многочисленные эксперименты, проведенные почти во всех странах, несомненно подтверждают этот замечательный результат Кармана.

Мы дадим числовые результаты некоторых из такого рода экспериментов без описания аппаратуры и деталей исследований, отсылая интересующихся к соответствующим оригинальным работам. Известно, что Карман и Рубах¹ провели первую экспериментальную проверку теоретических результатов в гидротке при $2000 \leq Re \leq 3000$ обычным визуальным методом. Поверхность воды посыпалась тонким алюминиевым порошком, и вихри, образующиеся при движении тела, фотографировались. Данные опытов приведены в таблице а. (все длины даны в сантиметрах).

Таблица а

	h	l	$\frac{h}{l}$	$\left(\frac{\bar{u}}{U_0}\right)$
Пластика ширины 1,75 см.	3,00	9,80	0,305	0,20
Круглый цилиндр диам. 1,5 см. . .	1,80	6,40	0,280	0,14

Как видно, теоретические результаты подтверждаются очень хорошо, по детали экспериментирования авторами описаны очень скупо.

Весьма подробные исследования с совершенной аппаратурой были проведены в период с 1928 до 1931 г. Е. Тейлером². Таблицы b , c , d , e , дают весьма любопытные результаты и детали поведения вихревых дорожек за плохообтекаемыми препятствиями.

Таблица б

Круглый цилиндр $d = 3,58$ см.

$$U_0 = 202,7 \text{ см/сек. } Re = 4,900 = \frac{U_0 d}{\nu}.$$

(опыты ставились в потоке воздуха, размеры в сантиметрах)

Расстояние за цилиндром в сантиметрах	h	l	$\frac{h}{l}$	$\frac{\bar{u}}{U_0}$
11,50	3,80	13,00	0,293	0,358
16,50	4,25	13,50	0,314	0,334
25,00	4,80	14,00	0,342	0,308
31,50	5,00	14,75	0,339	0,272

Таблица с

Круглый цилиндр $d = 2,5$ см. $Re = 3,820$

Расстояние за цилиндром в сантиметрах	h	l	$\frac{h}{l}$	$\frac{\bar{u}}{U_0}$
10,0	3,00	9,80	0,306	0,339
14,0	3,45	10,30	0,335	0,302
21,0	3,50	10,80	0,325	0,270
26,0	3,50	10,80	0,325	0,270
31,1	3,60	11,20	0,321	0,244

¹ Kármán Th. and Rubach H. Über den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes. Physikalische Zeitschr. 13, 1912. Стр. 49.

² E. Tyber. Vortex Formation behind Obstacles of Various Sections Philosph. Mag. April 1931.

Таблица d

Круглый цилиндр $d = 0,585$ см.
 $Re = 1,160$

Расстояние за цилиндром в сантиметрах	h	l	$\frac{h}{l}$	$\frac{u}{U_0}$
2,50	0,560	2,15	0,265	0,279
3,50	0,620	2,40	0,258	0,196
5,00	0,620	2,40	0,258	0,196
6,00	0,640	2,40	0,267	0,196
8,50	0,645	2,40	0,269	0,196

Таблица e

Вихревая дорожка за крылом при больших
углах атаки

I Хорда крыла $t = 2,5$ см; максимальная толщина 0,334 см				II Хорда крыла 5,10 см; максимальная толщина 0,785 см			
Угол атаки	h	l	$\frac{h}{l}$	Угол атаки	h	l	$\frac{h}{l}$
90°	3,50	13,50	0,260	90°	6,52	25,50	0,256
60°	3,12	10,51	0,295	45°	4,88	17,00	0,287
45°	2,88	9,05	0,318	30°	3,40	12,06	0,281
30°	2,06	6,73	0,304	20°	2,48	8,26	0,300
15°	1,07	3,74	0,284	10°	1,60	5,25	0,205
				0°	—	4,05	—

Очень близкие к крылу результаты были получены в большинстве случаев Фейджем и Иогансеном¹ при исследованиях пластинки при углах атаки от 30 до 90°. Результаты для $\frac{h}{l}$, значительно уклоняющиеся от теоретического значения Кармана, были получены в некоторых опытах Фейджа и Иогансена и опытах Бенара². Исследование вихревых дорожек за эллиптическими цилиндрами было проведено Рихардсом³. О полученных им данных он говорит так: „Среднее значение отношения $\frac{h}{l}$, измеренное по вихрям, близким к цилиндрам из серии наших опытов, получилось равным 0,318“. Интересно отметить, что отношение $\frac{u}{U_0}$ уменьшается с увеличением отношения полуосей эллиптических цилиндров. Рассмотрение данных, которые мы привели выше (это наиболее существенные факты из известных в настоящее время экспериментов) показывает, что теоретический результат Кармана об устойчивости подтверждается большинством экспериментов.

На фиг. 3 и 4 мы приводим вихревые дорожки за круговым и эллиптическим цилиндром при ламинарном режиме течений. Чрезвычайно наглядно шахматное расположение вихрей, причем отношение h к l близко к определенному выше теоретическому значению (8).

Предыдущие исследования устойчивости вихреобразований за плохо-обтекаемыми контурами позволяют исследовать вопрос о величине вихревого сопротивления тела. Однако, при таком подсчете не удается связать величину интенсивности вихрей и геометрические параметры дорожки с геометрической формой тела, так как решение этих вопросов не может быть проведено без анализа истории пограничного слоя на контуре обтекаемого тела.

Пусть мы имеем, например, круглый цилиндр, обтекаемый потоком маловязкой жидкости.

Как показывает опыт⁴, за цилиндром образуется шахматная вихревая дорожка, причем несмотря на вязкость жидкости, диффузия вихрей скаывается на строении дорожки только на большом расстоянии за цилиндром.

¹ Fage and Iohansen. Proc. Roy. Soc. A. Vol. 116. 1927.

² Benard. Comptes Rendus. Vol. 182 p. 1523. 1926.

³ Richards G. An Experimental Investigation of the Wake Behind an Elliptic Cylinder. Reports and Memoranda № 1590. 1934.

⁴ См. обзор экспериментальных исследований в статье Falkengagen „Klassische Hydrodynamik“ в Handbuch der Experim. Physik. Bd. IV, Teil I.

Поставим эту задачу в условиях идеальной жидкости, заменив реально существующую вихревую конечную дорожку с вихрями переменной циркуляции бесконечной дорожкой Кармана с вихрями постоянной интенсивности. Тогда, применяя к части вихревой дорожки теорему о количестве движения, мы можем найти силу лобового сопротивления от вихрей. Пусть скорость тела, движущегося в жидкости, будет U_0 , скорость вихревой дорожки \bar{u} , тогда относительная скорость вихрей будет: $U_0 - \bar{u}$.

При применении теоремы о количестве движения за промежуток времени T возьмем то время, за которое наша дорожка, как целое, продвинется на длину l (как нетрудно видеть, за это время образуется пара новых вихрей), т. е. возьмем

$$T = \frac{l}{U_0 - \bar{u}}.$$

Вычисляя изменение количества движения, вследствие протекания жидкости через контрольную поверхность, подсчитывая импульс сил давления и принимая во внимание изменение количества движения внутри контрольной поверхности, благодаря образованию новой пары вихрей, мы получим силу вихревого сопротивления в виде:

$$W = \rho \Gamma \frac{h}{l} (U_0 - 2\bar{u}) + \rho \frac{\Gamma^2}{2\pi l}. \quad (3)$$

Из полученного выше условия устойчивости следует, что

$$\bar{u} = \frac{\Gamma}{2l} \operatorname{tg} h \left(\frac{\pi h}{l} \right) = \frac{\Gamma}{l \sqrt{8}};$$

так как

$$\operatorname{tg} h \left(\frac{\pi h}{l} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

если

$$\frac{h}{l} = 0,2806,$$

следовательно,

$$\Gamma = \sqrt{8} \cdot l \cdot \bar{u}.$$

Подставив это значение Γ в формулу (3), легко находим:

$$W = \rho l U_0^2 \left[0,794 \frac{\bar{u}}{U_0} - 0,314 \left(\frac{\bar{u}}{U_0} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с обычной аэродинамической формулой для подсчета лобового сопротивления

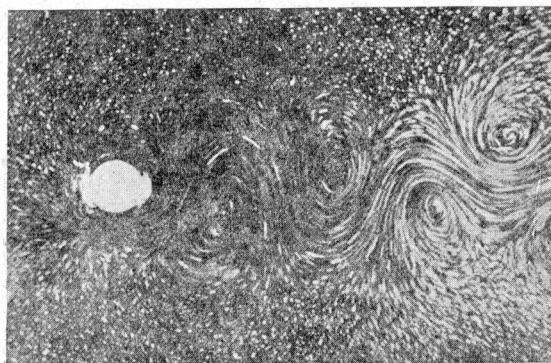
$$W = C_{x \text{ вихр}} \rho \cdot S \cdot U^2,$$

легко находим, что

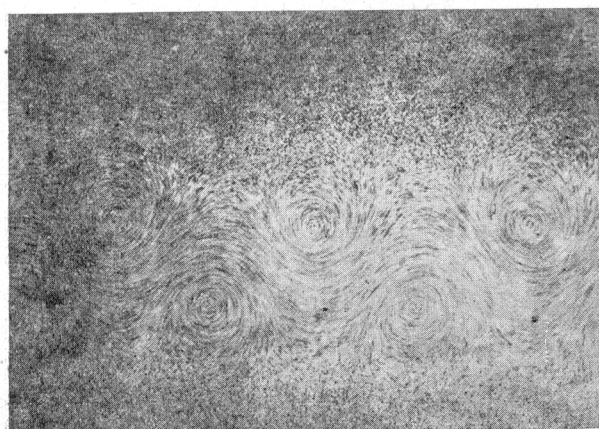
$$C_{x \text{ в}} = \left[0,794 \frac{\bar{u}}{U_0} - 0,314 \left(\frac{\bar{u}}{U_0} \right)^2 \right] \cdot \frac{l}{d}, \quad (5)$$

так как в условиях плоскопараллельного течения $S = l \cdot d$, где d — характеристический размер тела (например, диаметр цилиндра и т. п.).

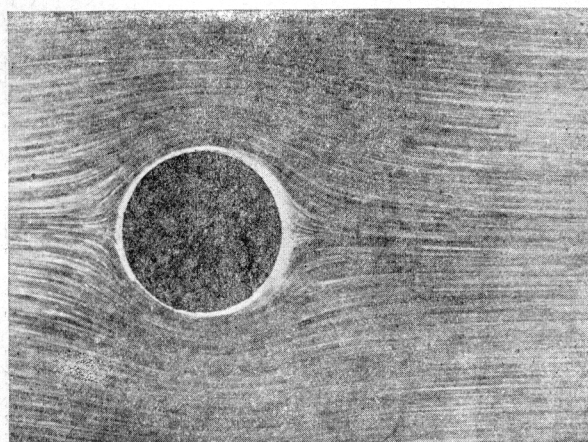
Для того, чтобы иметь возможность пользоваться полученной формулой, необходимо определить величины l и \bar{u} , или, что совершенно эквивалентно, h и Γ . Нетрудно, однако, видеть, что изложенная выше теория Кармана не дает возможности найти эти величины и даже не указывает способов их определения. Эти неизвестные h и Γ , определяющие величину вихревого сопротивления, фундаментально связаны с гео-



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

метрической конфигурацией обтекаемых тел. Отыскание этой связи представляет чрезвычайной важности задачу, решение которой позволит приложить для технической практики формулу лобового сопротивления Кармана. Необходимо отметить, что в рамках идеальной жидкости установить связь геометрии контура с параметрами дорожки Кармана невозможно, так как „обтекаемость тела“ является фактором, связанным с вязкостью жидкости.

Естественно, поэтому, искать установление такой связи, используя результаты теории пограничного слоя Прандтля.

Если в формулу (5) подставить u и l , определенные из эксперимента, тогда получающееся значение $C_{x,в}$ прекрасно совпадает с практическим коэффициентом лобового сопротивления (ошибка меньше 3%).

Необходимо также указать, что в первом издании своей работы¹ Карман пытался определить циркуляцию вихрей теоретически, считая, что величина циркуляции равняется циркуляции пограничного слоя жидкости длины l , т. е. Карман полагал, что $\Gamma = U_0 \cdot l$. Если воспользоваться этой формулой для определения циркуляции и подсчитать по ней величину скорости отходящих вихрей, а затем положить для цилиндра $d = h$, то подсчитанный таким образом коэффициент вихревого сопротивления оказывается в два раза больше экспериментально полученного.

В нашей русской литературе имеются две попытки ввести коэффициент $a = 1/2$ в формулу Кармана для подсчета циркуляции, но эти предположения нельзя считать теоретически обоснованными; скорее это коэффициенты, вводимые произвольно для согласования теоретических формул с экспериментом².

Итак, исходя из теории вихревого сопротивления Кармана, мы можем сделать следующие выводы:

1. Теория устойчивости бесконечных вихревых дорожек, развитая Карманом, дает достаточно точное условие устойчивости реальных вихревых дорожек, образующихся за кормовой частью плохообтекаемых тел. Будем во всем дальнейшем считать, что вихревые системы, образующиеся за телами при их движении в маловязкой жидкости, удовлетворяют условию устойчивости Кармана.

2. Формула (5) для подсчета вихревого сопротивления дает правильные результаты, если в ней рационально определить неизвестные \bar{u} и l , фундаментально связанные с геометрией тела.

3. Формула Кармана для подсчета циркуляции вихрей дает неправильное, преувеличенное значение коэффициента вихревого сопротивления т. е., очевидно, реальная величина циркуляции вихрей, образующихся за телом, значительно меньше теоретически предполагаемой величины.

Из сказанного становится очевидной цель нашей работы. Мы хотим, заимствуя некоторые результаты теории ламинарного пограничного слоя, дать рациональный способ подсчета параметров дорожек Кармана.

2. ЛОБОВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

а) Ламинарный режим

Для уяснения метода, который мы предлагаем для подсчета h и Γ (через них по элементарным формулам находятся l и \bar{u}), рассмотрим еще раз³ задачу о вихревом сопротивлении кругового цилиндра.

¹ Th. v. Kármán. Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. Göttingen Nachrichten, 1911 und 1912.

² См. Н. Д. Жуковский. Теоретические основы воздухоплавания. 1925 г. Стр. 190. В. В. Голубев. Теория крыла конечного размаха. 1931. Стр. 136—137.

³ Космодемьянский. О вихревом сопротивлении. Труды ЦАГИ, вып. 216. 1935. В настоящей статье мы отказываемся от условия $u_1 = 0$ и получаем формулы и результаты, более близкие к эксперименту.

Процесс образования вихрей за кормовой частью с момента начала движения цилиндра в жидкости, на основании весьма тщательных экспериментов Рубаха¹ и Прандтля-Титъенса², можно представить себе последовательно так.

В начале движения цилиндра он омывается внешним потоком полностью, и получаемые (фиг. 5 и 6) линии тока весьма близки к линиям тока при идеальном обтекании. Немного позже³ за цилиндром образуется пара симметрично расположенных вихрей (фиг. 7—8). Вначале эти вихри очень незначительны и мало изменяют характер потока за цилиндром, но с течением времени центры вихрей постепенно отходят от стенки, циркуляция вихрей сильно возрастает и общая картина течения весьма отличается от первоначальной. Как показали исследования Л. Феппл⁴, симметрично расположенная пара вихрей—неустойчива, и опыт в полном согласии с теорией показывает, что при некотором положении симметрия в расположении вихрей нарушается, один из вихрей отрывается и уносится внешним потоком. На место оторвавшегося вихря зарождается новый, причем увеличение его циркуляции приводит к отрыву второго вихря. Явление поочередного срыва вихрей затем повторяется, причем заданной скорости U_0 соответствует вполне определенная периодичность схода вихрей. Оторвавшиеся от цилиндра вихри располагаются за телом в шахматном порядке, причем отношение близко к теоретическому значению Кармана, равному 0,2806. Циркуляция первого оторвавшегося от цилиндра вихря и определит собой в случае стационарного движения циркуляцию любого вихря шахматной вихревой дорожки. Следовательно, если мы найдем способ определения циркуляции пары симметрично расположенных вихрей непосредственно перед отрывом одного из них, то этим самым будет определена циркуляция любого вихря дорожки Кармана.

Рассмотрим обтекание цилиндра радиуса $r=1$ с двумя присоединенными вихрями, потоком идеальной жидкости (фиг. 9). Вихри расположим симметрично относительно оси O_x , а центры вихрей возьмем как-раз в том положении, когда небольшое изменение циркуляции ведет к отрыву одного из вихрей. Циркуляцию каждого из присоединенных вихрей возьмем равной циркуляции вихря установившейся дорожки Кармана.

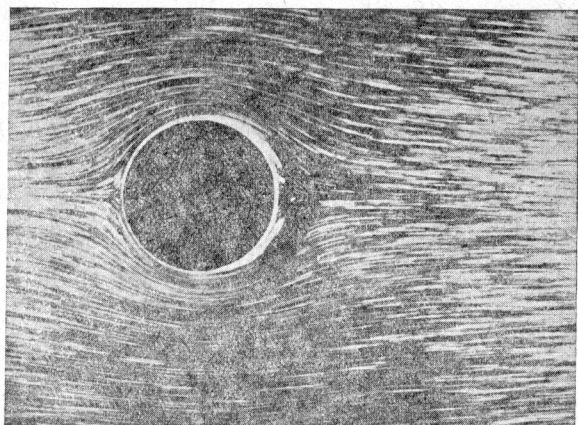
Пусть плоскостью течения будет плоскость комплексного переменного z , положение центров вихрей определяется координатами $z_1 = x_1 + iy_1$ и $\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$. Полярные координаты центров присоединенных вихрей пусть будут ρ и $\pm\psi$, так что $z_1 = \rho e^{i\psi}$, а $\bar{z}_1 = \rho e^{-i\psi}$. Чтобы написать характеристическую функцию течения и получить среди линий тока окружность $r=1$, мы должны, на основании принципа Томсона, присоединить еще два вихря, являющиеся зеркальными отображениями первых двух относительно окружности. Легко видеть, что их координаты будут $\frac{1}{z_1}$ и $\frac{1}{\bar{z}_1}$.

¹ H. Rubach. Über die Entstehung und Fortbewegung des Wirbelpaars bei zylindrische Körpern. Forschungsheft V. D. I. № 185. 1917.

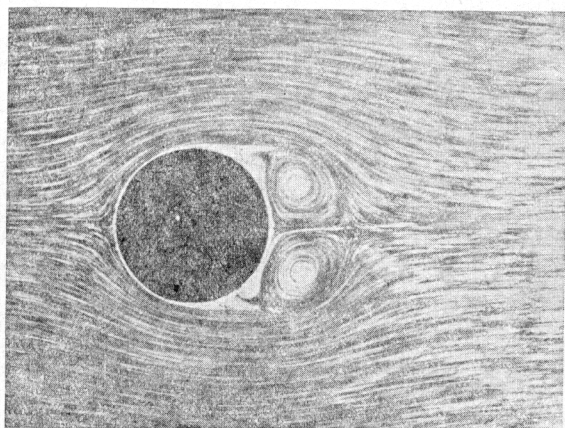
² Прандтль-Титъенс. Гидро- и аэромеханика. Том II.

³ Как показал Блазиус в своей диссертации, это время можно приблизительно подсчитать, исследуя уравнения Прандтля для случая неустановившегося движения. По его подсчетам время до отхода струи $t_a = 0,39 \frac{a}{U_0}$, где a —радиус цилиндра.

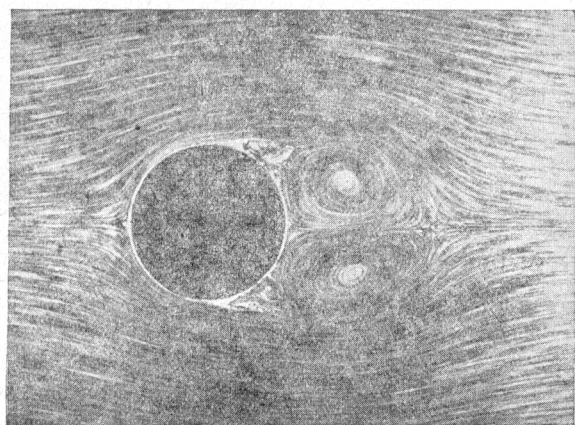
⁴ L. Föppel. Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder. Münchener Berichte. 1913.



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

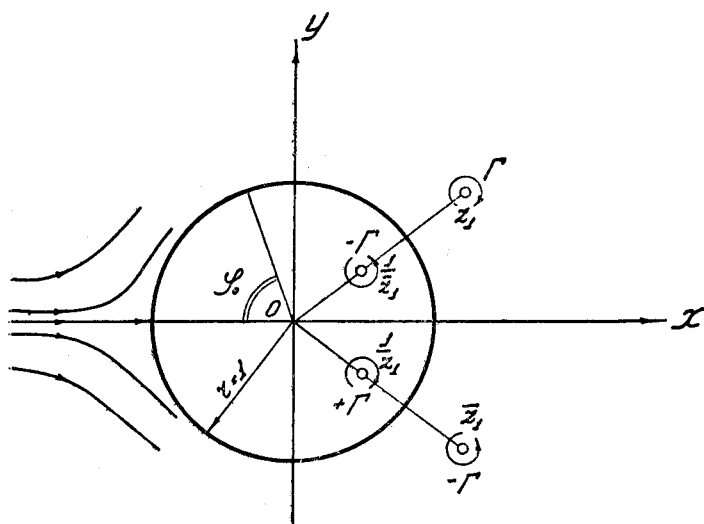
Так как скорость на бесконечности мы обозначили U_0 , то характеристическая функция будет иметь вид:

$$W(z) = U_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\left(z - z_1 \right) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right)}{\left(z - \bar{z}_1 \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{z_1} \right)}, \quad (1)$$

где Γ — циркуляция вихря.

Дифференцируя (1) по z , мы получим скорость в любой точке плоскости (z):

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U_0 \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{z}_1}} - \frac{1}{z - \bar{z}_1} - \frac{1}{z - \frac{1}{z_1}} \right]. \quad (2)$$



Фиг. 9.

Мы можем, пользуясь формулой (2), найти скорость внешнего вихревого центра, например, z_1 ; для этого нужно вместо произвольного z в формуле (2) подставить координату вихря z_1 и откинуть член с бесконечностью $\frac{1}{z_1 - z_1}$, так как сам вихрь себе никакой скорости не сообщает.

Обозначая скорость вихревого центра z_1 через $\bar{v}_1 = u_1 - iv_1$, получим из (2)

$$\bar{v}_1 = u_1 - iv_1 = U_0 \left(1 - \frac{1}{z_1^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \left[\frac{1}{z_1 - \frac{1}{z_1}} - \frac{1}{z_1 - \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 - \frac{1}{\bar{z}_1}} \right]. \quad (3)$$

Опуская индекс и разделяя действительную и мнимую часть (3), будем иметь:

$$u_1 = U_0 \left(1 - \frac{x^2 - y^2}{\rho^4} \right) + \frac{\Gamma y}{2\pi} \cdot \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2(x^2 - y^2)} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2y^2} \right]; \quad (4)$$

$$-v_1 = U_0 \frac{2xy}{\rho^4} + \frac{\Gamma x}{2\pi} \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2(x^2 - y^2)} - \frac{1}{\rho^2 - 1} \right], \quad (5)$$

где

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

так как

$$1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2 - 2ixy}{\rho^4};$$

$$\frac{1}{z - \bar{z}} = \frac{1}{2iy};$$

$$\frac{1}{z - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z(\bar{z}^2 - 1)}{(z^2 - 1)(\bar{z}^2 - 1)} = \frac{z(\bar{z}^2 - 1)}{1 + \rho^4 - (z^2 + \bar{z}^2)} =$$

$$= \frac{\rho^2(x - iy)}{1 + \rho^4 - 2(x^2 - y^2)} - \frac{x + iy}{1 + \rho^4 - 2(x^2 - y^2)}.$$

Зная характеристическую функцию течения (1), мы можем легко найти распределение скоростей на поверхности цилиндра, для этого в формуле (2) нужно подставить $z = e^{i\varphi}$, тогда получим:

$$\bar{v} = u - iv = U_0(1 - e^{-2i\varphi}) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{e^{i\varphi} - z_1} + \frac{1}{e^{i\varphi} - \frac{1}{z_1}} - \frac{1}{e^{i\varphi} - \bar{z}_1} - \frac{1}{e^{i\varphi} - \frac{1}{\bar{z}_1}} \right]. \quad (6)$$

Разделяя действительную и мнимую часть, легко находим:

$$u = U_0(1 - \cos 2\varphi) - A \cdot \sin \varphi; \quad (7)$$

$$v = U_0 \sin 2\varphi - A \cos \varphi, \quad (8)$$

где

$$A = \frac{2\rho\Gamma \cdot \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1) \cdot \sin \varphi}{\pi \cdot R_1 \cdot R_2},$$

а

$$R_1 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi + \psi);$$

$$R_2 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - \psi).$$

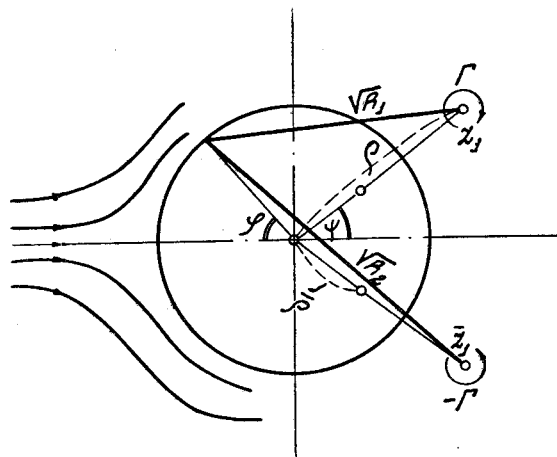
Возводя (7) и (8) в квадрат и обозначая модуль скорости U , получим распределение скоростей по контуру цилиндра в виде:

$$U = 2U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma \rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{\pi U_0 R_1 R_2} \right], \quad (9)$$

где: U_0 — скорость потока на бесконечности, а ρ и ψ — полярные координаты присоединенных внешних вихрей.

Из фиг. 10 совершенно ясно, что R_1 представляет квадрат расстояния какой-либо точки цилиндра, положение которой характеризуется углом φ до вихревого центра z_1 , а R_2 есть квадрат расстояния от той же точки до вихревого центра \bar{z}_1 . Если в формуле (9) ρ , ψ и Γ известны, то мы легко можем найти распределение скоростей, которое отличается от безвихревого потенциального течения уменьшением максимальной скорости и смещением точки ее приложения от $\varphi = \frac{\pi}{2}$ к меньшим значениям φ ; тем же свойством можно отчасти характеризовать и поток реальной ма-
ловязкой жидкости.

Знание величин ρ , ψ и Γ позволяет в нашей постановке задачи подсчитать вихревое сопротивление цилиндра, так как через эти величины легко находятся все элементы вихревой дорожки Кармана, т. е. h , l и u , а через них, как мы видели выше, коэффициент сопротивления находится элементарно.



Фиг. 10.

Для нахождения трех неизвестных ρ , ψ и Γ мы можем написать три соотношения, исходя из следующих соображений.

1. Величина вихревого сопротивления качественно, главным образом, определяется шириной вихревой дорожки Кармана. Чем шире дорожка, тем больше циркуляция отдельных вихрей, тем большая часть полного лобового сопротивления составляется из вихревого сопротивления. Можно сказать, что ширина дорожки характеризует геометрию контура в смысле той или иной обтекаемости. С точки зрения теории пограничного

слоя лучшую или худшую обтекаемость можно характеризовать положением точки срыва струй при ламинарном режиме. Но так как точное знание положения точки срыва струй требует знания экспериментального закона распределения скоростей, то мы считаем достаточным характеризовать обтекаемость контура (и, следовательно, ширину вихревой дорожки) положением точки отрыва, получающейся, исходя из потенциального распределения скоростей.

Положим поэтому, что ширина вихревой дорожки Кармана равна расстоянию между точками срыва струй по направлению, перпендикулярному к скорости невозмущенного потока.

Пусть положение точки срыва на цилиндре будет характеризоваться углом φ_0 , тогда ширина дорожки Кармана будет вычисляться по формуле:

$$h = 2 \cdot \sin \varphi_0,$$

с другой стороны,

$$h = 2\rho \sin \psi,$$

следовательно,

$$\sin \varphi_0 = \rho \cdot \sin \psi. \tag{10}$$



Формула (10) дает первое соотношение для определения искомых неизвестных.

2. Совершенно ясно, что после того, как циркуляция присоединенного вихря достигает предельной величины (после чего вихрь отходит от цилиндра), вертикальная слагающая вихревого центра (z_1 или \bar{z}_1) обращается в нуль и вихрь продолжает двигаться параллельно оси Ox .

Таким образом, можно сказать: скорость внешнего вихревого центра (например, z_1) по нормали к дорожке равна нулю.

Приравнявая $v_1 = 0$ для вихря z_1 [формула (5)], получим:

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0} = \frac{2y}{\rho^4 \left[\frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2(x^2 - y^2)} \right]}, \tag{11}$$

но так как $x = \rho \cos \psi$, $y = \rho \sin \psi$, а $h = 2\rho \sin \psi$, то формулу (11) удобнее переписать в следующем виде:

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{h\rho^4}{\sigma}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = (\rho^2 - 1)(1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi).$$

Формула (12) и дает второе, необходимое для вычислений вихревого сопротивления соотношение.

3. Изменение величины Γ —циркуляции присоединенных вихрей—ведет к изменению распределения скоростей и давлений вдоль поверхности обтекаемого контура. Экспериментально наблюдаемое распределение скоростей и давлений можно характеризовать, согласно теории ламинарного пограничного слоя, заданием положения экспериментальной точки отрыва струй, так как любому физически возможному полю скоростей около данного кругового цилиндра соответствует при установившемся режиме течения определенная и единственная точка срыва.

В предлагаемом методе циркуляции присоединенных вихрей будет тем больше, чем больше разность между теоретическим и экспериментальным углами отрыва, так как с увеличением этой разности фактическая картина распределения давления будет все сильнее отличаться от теоретического распределения давлений, на основании которого мы нашли ширину вихревой дорожки.

Если бы мы захотели определить величину циркуляции присоединенных вихрей, задаваясь точкой отрыва, полученной по потенциальному (без вихрей z_1 и \bar{z}_1) распределению скоростей, то, очевидно, получили бы $\Gamma = 0$.

Мы формулируем третье необходимое нам условие так.

Возьмем формулу, дающую распределение скоростей по контуру кругового цилиндра:

$$U = 2U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma h (\rho^2 - 1)}{2\pi R_1 R_2} \right] \quad (9)$$

и напомним, пользуясь этой формулой (9), условие отрыва. Если бы циркуляция присоединенных вихрей была нам известна и соответствовала реальному значению циркуляции наблюдаемого течения около кругового цилиндра, то из условия отрыва мы нашли бы достаточно точно положение экспериментальной точки срыва струй. Следовательно, обратно, если мы в написанное условие отрыва подставим значение угла отрыва (экспериментально найденного), то мы получим третье условие для определения циркуляции.

Ясно, конечно, что экспериментальный угол отрыва можно находить не только визуальными методами, а пользоваться тем же условием отрыва струй Прандтля. Нужно только подставлять в него не теоретическое распределение скоростей $U = 2U_0 \sin \varphi$, а экспериментальное.

Для круглого цилиндра экспериментальное распределение скоростей в ламинарной области течения дается хорошо известной формулой Гименца¹:

$$U = 7,151 x - 0,045 x^3 - 0,00033 x^5,$$

где $x = \frac{9,75 \varphi}{2}$, а $U_0 = 19,2 \text{ см/сек.}$

¹ K. Hiemenz. Die Grenzschicht an einem in dem gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder. Dissertation-Göttingen. 1911.

Итак, если мы знаем из эксперимента положение точки срыва струй в реальном потоке около кругового цилиндра, то мы легко можем определить циркуляцию вихрей кармановской вихревой дорожки.

Как мы указывали², условие отрыва струй для цилиндра можно написать в виде:

$$\frac{U'_\varphi}{U} = -\frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{1}{\varphi}, \quad (13)$$

где

$$U'_\varphi = \frac{dU}{d\varphi}.$$

Так как по (9)

$$U = 2 U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{h \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right]$$

и, значит,

$$U'_\varphi = 2 U_0 \cos \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{h \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right] + \\ + \frac{\Gamma \cdot h (\rho^2 - 1) \sin \varphi}{\pi R_1 R_2} \cdot \left[\frac{R'_1}{R_1} + \frac{R'_2}{R_2} \right],$$

где

$$R'_1 = \frac{dR_1}{d\varphi} = -2\rho \sin(\varphi + \psi),$$

$$R'_2 = \frac{dR_2}{d\varphi} = -2\rho \sin(\varphi - \psi),$$

то, следовательно,

$$U'_\varphi = 2 U_0 \cos \varphi \left[1 - \frac{\Gamma \cdot h \cdot (\rho^2 - 1)}{2\pi U_0 R_1 R_2} \right] - \\ - \frac{2\Gamma h (\rho^2 - 1) \cdot \sin \rho}{\pi R_1 R_2} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right]. \quad (14)$$

Принимая во внимание (9) и (14), получим окончательно условие отрыва струй от кругового цилиндра с двумя присоединенными вихрями в виде:

$$\operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \\ = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right], \quad (15)$$

где

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \sin \psi \cdot 2\rho \cdot (\rho^2 - 1).$$

Если в (15) циркуляция присоединенных вихрей Γ соответствует реальной величине циркуляции первых вихрей, образующихся за круглым цилиндром, при его движении в маловязкой жидкости, то эта формула даст (как это мы показывали ранее) положение точки отрыва, весьма близкое к наблюдаемому. Наоборот, если в (15) вместо произвольного φ под-

¹ А. А. Космодемьянский. К теории лобового сопротивления. М. Труды ЦАГИ, вып. 215. 1935.

ставить угол отрыва, взятый из эксперимента, тогда соотношения (10), (12) и (15) позволят нам определить ρ , ψ и Γ .

Таким образом, для определения трех введенных нами неизвестных мы получили следующие три уравнения:

$$\sin \varphi_0 = \rho \cdot \sin \psi; \quad (10)$$

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{h\rho^4}{\sigma}; \quad (12)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right], \quad (15)$$

где

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \sin \psi \cdot 2\rho \cdot (\rho^2 - 1).$$

Эти три уравнения и позволяют задачу вихревого сопротивления решить до конца.

Уравнение (15) можно заменить совершенно эквивалентным, но практически более выгодным соотношением. Действительно, подберем циркуляцию присоединенных вихрей так, чтобы распределение давлений [а, следовательно, и распределение скоростей (9)] совпадало с экспериментальным распределением. Этого можно приблизительно достигнуть, потребовав, чтобы совпадали точки минимума давлений нашего теоретического потока с двумя присоединенными вихрями и потока реального. Таким образом, положив в $U'_\varphi = 0$ вместо произвольного угла угол минимума давления, наблюдаемый в действительных течениях около кругового цилиндра, мы найдем новое соотношение:

$$\operatorname{ctg} \varphi_m = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_m + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_m - \psi)}{R_2} \right], \quad (16)$$

которое может вполне заменить уравнение (15).

Необходимо отметить, что (16) совершенно не связано с теорией пограничного слоя и условиями отрыва струй, а поэтому формулой (16) можно пользоваться при любом режиме течения.

Проведем сначала все вычисления по формулам (10), (12) и (15), т. е. будем брать из эксперимента положение точки срыва струй.

Имеем по опытам Гименца¹ в водяном канале $\varphi = 82^\circ$, по опытам Грина² в аэродинамической трубе $\varphi = 79^\circ$. Угол отрыва, исходя из потенциального распределения скоростей, получается по всем теоретическим исследованиям около 112° (Блазиус³ в своей диссертации 1908 г. дает $\varphi = 113^\circ$ Л. С. Лейбензон в работе 1934 г.⁴ дает $\varphi = 109,5$; у Л. Г. Лойцянского⁵ в работе 1934 г. $\varphi = 115^\circ$. Наши предыдущие⁶ вычисления ближе подходят к результатам Блазиуса и дают $\varphi = 112^\circ$.

Следовательно, ширину дорожки Кармана можно считать равной:

$$h = 2 \sin 112^\circ = 1,86.$$

¹ K. Himenz. Loc. cit. стр. 29.

² Green. Reports and Memoranda № 1313

³ H. Blasius. Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner. Zeits Reibung. f. Math. und Phys. Bd. 56.

⁴ Л. С. Лейбензон. Математич. сб., т. 42, 2. 1934.

⁵ Л. Г. Лойцянский. Отрыв струй с поверхности цилиндра, обтекаемого вязкой жидкостью. Прикладная математика и механика. Т. I, вып. I. 1934.

⁶ См. Труды ЦАГИ, вып. 215. 1935.

Вводя ширину дорожки h , можно представить основные уравнения (10), 12) и (15) в виде:

$$0,93 = \rho \cdot \sin \varphi; \quad \frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{h\rho^4}{(\rho^2 - 1)[h^2 + (\rho^2 - 1)^2]}; \quad (17)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right]. \quad (18)$$

Обозначив

$$Y_1(\rho) = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right],$$

$$Y_2 = \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{1}{\varphi},$$

мы получим уравнение для определения ρ :

$$Y_1(\rho) = Y_2,$$

которое мы решаем графически.

Результаты расчетов величин, входящих в формулы (17) и (18), даны в табл. 1.

Таблица 1

ρ	$h\rho^4$	σ	$\frac{2\pi U_0}{\Gamma}$	R_1	R_2	$2\rho B$	$Y_1(\rho)$	Y_2
1,1	2,71	0,730	3,71	0,54	4,21	-0,22	0,13	0,332
1,3	5,31	2,69	1,98	1,11	4,77	1,68	0,295	
1,5	9,41	6,26	1,50	1,74	5,35	4,65	0,374	
1,7	15,5	13,2	1,16	2,45	6,13	10,3	0,420	
2,0	23,8	37,4	0,796	3,65	7,34	28,1	0,540	

Построив график кривых $Y_1(\rho)$ и Y_2 , мы по точке их пересечения находим искомое значение ρ (фиг. 11).

В нашем случае (т. е. при $h = 1,86$ и экспериментальном $\varphi = 82^\circ$) оказывается, что

$$\rho = 1,40.$$

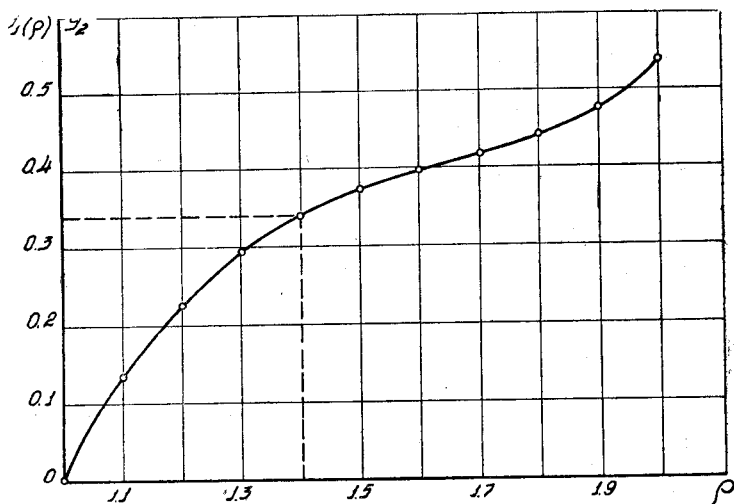
По формуле (12) находим:

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = 1,70$$

и, следовательно,

$$\Gamma = 3,7 U_0.$$

Так как $h = 1,86$, то из условия устойчивости находим $l = 6,63$. Для данного случая



Фиг. 11.

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,198 \cong 0,2.$$

Подставляя все полученные значения в формулу Кармана для коэффициента лобового сопротивления, легко найдем, что

$$C_{x_{\text{вихр}}} = 0,49. \quad (19)$$

Изменение ширины вихревой дорожки приводит к изменению циркуляции присоединенных вихрей; естественно, поэтому, думать, что вышеприведенные формулы будут сильно зависеть от задания h ширины вихревой дорожки Кармана.

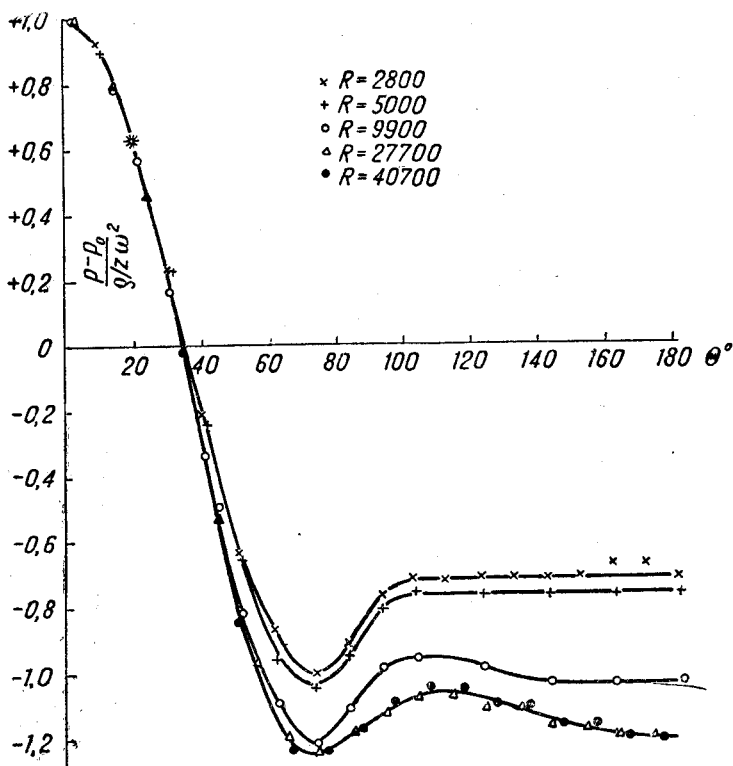
Такое утверждение не будет, однако, правильным, так как в рассмотренных формулах величина циркуляции зависит, главным образом, от разности углов отрыва¹ при потенциальном и экспериментальном внешнем потоке, хотя, конечно, зависит и от h , т. е. интенсивность вихрей определяется перемещением точки отрыва от момента t_0 начала образования первой пары вихрей до момента t_1 отрыва одного из сформировавшихся вихрей.

Если воспользоваться формулами (10), (12) и (16), то мы получим, проводя все вычисления, $\rho = 1,62$, $\Gamma = 5,0U_0$, $\frac{u}{U_0} = 0,245$ $C_{x_{\text{вихр}}} = 0,63$.

Для определения точки минимума давления мы воспользовались экспериментальными данными В. Линке².

На фиг. (12) приведены кривые распределения давления по круглому цилиндру для различных чисел Рейнольдса. Как видно, P_{\min} для квадратичной области сопротивления имеет место при

$$\varphi = 72^\circ - 73,5^\circ.$$



Фиг. 12.

¹ Достаточно ярко это утверждение вытекает из следующих вычислений: если взять φ отрыва равным 80° (вместо 82°), тогда $\rho = 1,56$.

² W. Linke. Neue Messungen zur Aerodynamik des Zylinders, insbesondere seines reinen Reibungswiderstandes. Phys. Zeits. 1931. S. 900—914.

Мы взяли $\varphi = 73^\circ$ для $Re = 27\,700$.

Основные расчетные формулы имеют здесь вид:

$$\frac{1}{2}h = 1,00 = \rho \sin \psi; \frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{h\rho^4}{\sigma},$$

где

$$\sigma = (\rho^2 - 1)[h^2 + (\rho^2 - 1)^2],$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right] = Y_1(\rho).$$

Результаты расчетов дает табл. 2.

Таблица 2

ρ	ψ	$h\rho^4$	σ	$\frac{2\pi U_0}{\Gamma}$	B	R_1	R_2	$\frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B}$	Y_1	$\operatorname{ctg} 73^\circ$
1,1	65°30'	—	—	3,24	—	—	—	—	—	0,305
1,3	50°20'	—	—	1,85	—	—	—	—	—	
1,5	41°40'	10,12	6,96	1,45	1,72	2,00	5,81	0,522	0,284	
1,7	36°0'	16,70	14,30	1,17	3,23	2,79	6,61	0,734	0,322	
2,0	30°0'	32,00	39,00	0,821	7,30	4,10	7,92	1,160	0,374	

Результаты расчетов по обоим методам могут совпасть, если в $\delta = 4,8 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}$ вместо 4,8 взять (4,2). Это обстоятельство указывает на то, что закон нарастания толщины пограничного слоя у круглого цилиндра в области точки срыва ближе и точнее будет даваться формулой $\delta = 4,2 \sqrt{\frac{\nu \cdot x}{U}}$. К такому же результату можно прийти, если решать задачу о нарастании толщины слоя, исходя из уравнения Польгаузена, полученного нами в одной из статей¹.

Сопротивление трения подсчитаем, пользуясь экспериментальным распределением скоростей внешнего потока.

Элементарная сила трения, как известно, будет:

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (20)$$

Пользуясь нашей формулой распределения скоростей в пограничном слое¹, мы полную силу лобового сопротивления трения разделим на две части R' и R'' , причем:

$$R' = \frac{\pi}{4,8} \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\mu \rho U^3} \frac{\sin \varphi}{V \varphi} d\varphi; \quad (21)$$

$$R'' = 2,4 \int_0^{\varphi_0} \sqrt{\mu \rho U U'^2 V \varphi} \sin \varphi d\varphi. \quad (22)$$

¹ См. Труды ЦАГИ, вып. 215. 1935.

Формулу распределения скоростей Гименца:

$$U = 7,151x - 0,04497x^3 - 0,00033x^5$$

целесообразно преобразовать, вынеся $2U_0 = 38,4$ за скобки и перейдя от x к φ (диаметр цилиндра Гименца равен $9,75$ см); тогда будем иметь:

$$U = 2U_0 [0,905\varphi - 0,1356\varphi^3 - 0,02366\varphi^5] \quad (23)$$

или, сокращенно, $U = 2U_0 F(\varphi)$, где $F(\varphi)$ — трехчлен, стоящий в квадратных скобках.

Легко видеть, что формулы (21) и (22) после подстановки (23) будут иметь вид:

$$R' = \frac{\pi}{2,4} \cdot \sqrt{\mu \rho d U_0^3} \int_0^{\varphi_0} F(\varphi) \cdot \sqrt{F(\varphi)} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi; \quad (24)$$

$$R'' = 4,8 \sqrt{\mu \rho d U_0^3} \int_0^{\varphi_0} F'(\varphi) \cdot \sqrt{F(\varphi)} \cdot \sqrt{\varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi, \quad (25)$$

где

$$F'(\varphi) = 0,905 - 0,4068\varphi^2 - 0,1138\varphi^4.$$

Обозначив

$$I_1 = \int_0^{\varphi_0} F(\varphi) \frac{\sqrt{F(\varphi)}}{\sqrt{\varphi}} \cdot \sin \varphi d\varphi,$$

$$I_2 = \int_0^{\varphi_0} F'(\varphi) \sqrt{F(\varphi)} \cdot \sqrt{\varphi} \cdot \sin \varphi d\varphi$$

и, проводя вычисление интегралов графически, получим:

$$I_1 = 0,687 \text{ и } I_2 = 0,192.$$

Следовательно,

$$R' = 0,9 \sqrt{\mu \rho d U_0^3},$$

$$R'' = 4,8 \cdot 0,192 \sqrt{\mu \rho d U_0^3} = 0,92 \sqrt{\mu \rho d U_0^3}.$$

Таким образом, сопротивление трения для круглого цилиндра будет:

$$R' + R'' = 1,82 \sqrt{\mu \cdot \rho \cdot d \cdot U_0^3}. \quad (26)$$

Разделив (26) на $\rho d U_0^3$, найдем:

$$C_f = \frac{1,82}{\sqrt{Re}}, \quad (27)$$

где $Re = \frac{U_0 d}{\nu}$, а C_f — коэффициент сопротивления трения. Как показывает формула (27), коэффициент сопротивления ламинарного трения обратно пропорционален корню квадратному из числа Рейнольдса.

Зная сопротивление трения и сопротивление вихревое, мы легко можем найти полный коэффициент лобового сопротивления C_x для кругового цилиндра. Действительно, из формул (19) и (27) имеем:

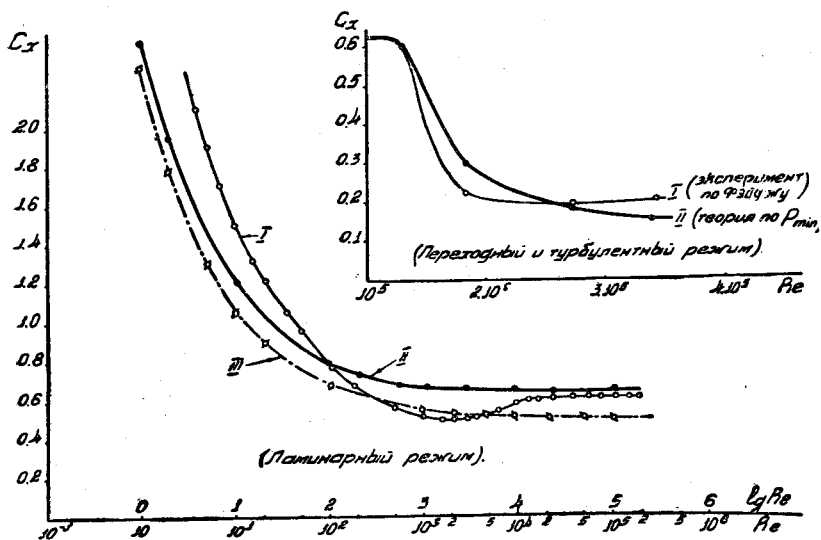
$$C_x = 0,49 + \frac{1,82}{\sqrt{Re}}, \quad (28)$$

если пользоваться коэффициентом вихревого сопротивления, подсчитанным по точке минимума давления, то

$$C_x = 0,63 + \frac{1,82}{\sqrt{Re}}. \quad (29)$$

Формулы (28) и (29) справедливы, конечно для ламинарной области течения, т. е. для чисел $Re \leq 200\,000$.

Сравнение результатов, даваемых формулами (28) и (29) с экспериментальными исследованиями Визельсбергера дает фиг. 13. Сплошная



Фиг. 13. Коэффициент лобового сопротивления кругового цилиндра для разных чисел Рейнольдса. I — Экспериментальная кривая по Визельсбергеру; II — Теоретическая кривая, подсчитанная по P_{\min} ; III — Теоретическая кривая, подсчитанная по ϕ отрыва

жирная линия (I) — суть экспериментальная кривая, полученная весьма точными экспериментальными исследованиями Визельсбергера¹, сплошная тонкая кривая — наша теоретическая, подсчитанная по формуле (29), а пунктирная линия также теоретическая, подсчитанная по формуле (28).

Кривые нанесены в логарифмическом масштабе, причем по горизонтальной оси нанесены $\lg Re$, а по вертикали C_x . Как видно, в области докритических чисел Рейнольдса полученные результаты удовлетворительно подтверждаются экспериментом. Необходимо также отметить, что аналогичные опыты с круговым цилиндром были проведены рядом крупнейших современных экспериментаторов.

¹ Между прочим, если взять $\delta = 4.2 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$, то коэффициент сопротивления трения изменится весьма мало.

¹ C. Wieselsberger. Neuere Feststellungen über die Gesetze des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Physikal. Zeits. Bd. 22, S. 321. 1921.

В приведенной ниже таблице мы даем результаты опытов Фейджа в национальной физической лаборатории (Англия), В. Линке в одной из немецких лабораторий (под руководством проф. Шиллера) и результаты экспериментов Тома в НАСА).

Таблица 3

U_0	Re	Коэф. пол-ного сопротив. C_x	Коэф. со-прот. трения C_f	Эксперимен-татор	Режим течения
6,7 м/сек	102,600	0,634	Не измерялся	Фейдж ¹	Ламинарный
8,2 м/сек	125,400	0,511	Не измерялся	Фейдж	Переходный от ламинарного к турбулентн.
2—16 м/сек	от 5000 до 41000	0,62 — 0,63	$\frac{2}{\sqrt{Re}}$	Линке ²	Ламинарный
От 3,7 до 11 м/сек	до 30 000	0,60 — 0,61	$\frac{1,92}{\sqrt{Re}}$	Том ³	Ламинарный

б) Турбулентный режим

Для подсчетов вихревого сопротивления в области переходной от ламинарного течения к турбулентному и в области вполне установившейся турбулентности, мы будем пользоваться заданием положения точки минимума давления, так как рациональных методов подсчета точки срыва при турбулентном режиме нет, а экспериментальные данные мало надежны.

Расчетные формулы будут, здесь иметь вид:

$$1,86 = 2\rho \sin \psi, \quad (10)$$

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{h\rho^4}{\sigma}; \quad (12)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi_{\min} = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_m + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_m - \psi)}{R_2} \right]. \quad (16)$$

$$\sigma = (\rho^2 - 1) \cdot (1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi),$$

$$R_1 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi_m + \psi),$$

$$R_2 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi_m - \psi),$$

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot 2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1).$$

φ_m есть угол (отсчитываемый от передней критической точки), при котором имеет место минимум давления (максимум скорости) реального потока. Значения φ_m в зависимости от числа Рейнольдса мы берем из опытов Фейджа¹ (табл. 4).

¹ A. Fage. The air-flow around a Circular Cylinder in the Region where the Boundary Layer separates from the surface. Philosophical Magazine. 1929.

² W. Linke. Neue Messungen zur Aerodynamik des Zylinders, insbesondere seinen Reibungswiderstandes. Physikalische Zeits. 1931.

³ A. Tohm. The Boundary Layer of the front Portion of a Cylinder. Reports and Memoranda № 1176. См. также: A. Tohm. Reports and Memoranda № 1194. и A. Tohm. Some Studies on the Flow Past Cylinders. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik herausgeg. A. Gilles, L. Kopf, Karman. 1929.

¹ A. Fage. The air-flow around a Circular Cylinder in the Region where the Boundary Layer separates from the surface. Philosophical Magazine. 1929.

Таблица 4

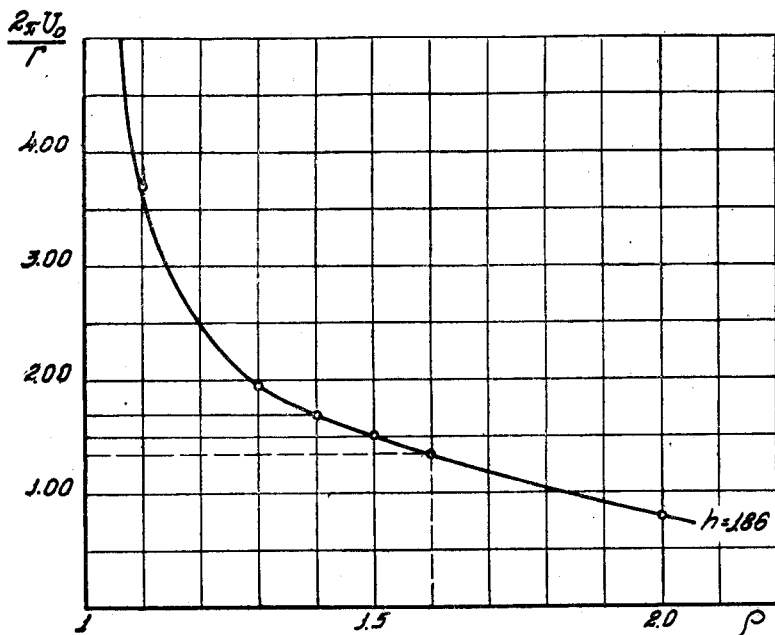
U_0 в фут/сек.	$Re = \frac{U_0 \cdot d}{\nu}$	φ_{min}	C_x	
39,2	182 800	76°5	0,227	1-й расчет
57,9	270 000	84°	0,192	2-й расчет
71,4	333 000	86°	0,218	3-й расчет

На фиг. 14 представлено изменение циркуляций внешних присоединенных вихрей в зависимости от ρ ; в рассматриваемом случае эта зависимость Γ от ρ не изменится, так как в формулы (10) и (12) φ не входит. Все вычисления сводятся только

к единственной формуле (16).

Результаты расчетов получились следующие:

1-й случай $\varphi_m = 76,5^\circ$ $\Gamma = 2,84 U_0$ $\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,121$, $C_{x.B} \simeq 0,30$.



Фиг. 14. Изменение циркуляции вихрей за круговым цилиндром

Сопротивление трения в этом случае оценить весьма трудно, так как пограничный слой будет частью ламинарный, а частью турбулентный с неопределенной переходной областью.

2-й случай $\varphi_m = 84^\circ$.

Вычисления дают здесь;

$$\rho = 1,07; \quad \frac{2\pi U_0}{\Gamma} = 5 \quad \Gamma \simeq 1,26,$$

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,067 \quad \text{и} \quad C_{x.B} = 0,174.$$

Грубая оценка сопротивления трения дает для данного числа Рейнольдса

$$C_{x.тр} = 0,007.$$

Таким образом, коэффициент полного лобового сопротивления будет:

$$C_{x.B} + C_{x.тр} = C_x = 0,181.$$

При подсчете сопротивления трения мы считали, что точка перехода от ламинарного слоя к турбулентному будет при $Re_\delta = \frac{U_0 \delta}{\nu} = 3000$, а поправка на влияние кривизны равна 50%. Ламинарное трение считалось по формуле Блазиуса:

$$C_{x, \text{тр}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re}},$$

а турбулентное по формуле Прандтля—Кармана:

$$C_{x, \text{тр}} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re}}.$$

Для $\varphi_m = 86^\circ$, $\rho = 1,05$ $\Gamma = 0,97 U_0$

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,0515, \quad C_{x, \text{в}} = 0,14.$$

На фиг. 13 дана теоретическая и экспериментальная кривые лобового сопротивления кругового цилиндра.

Экспериментальная кривая коэффициента полного лобового сопротивления кругового цилиндра в зависимости от числа Рейнольдса заимствована из опытов Везельсбергера¹, подтвержденных затем опытами Айзнера². Опытные данные Визельсбергера считаются в настоящее время наиболее достоверными из весьма большого количества экспериментов по круглому цилиндру.

3. ВИХРЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

а) Построение потенциального потока около эллиптического цилиндра

Известно, что для исследования пограничного слоя на каком-либо контуре, прежде всего, необходимо знать внешний поток. Для тел очень плохо обтекаемых с интенсивным вихреобразованием за кормовой частью внешний поток исследуется экспериментально, после чего для вычислений применяют приближенные интерполяционные формулы (см. ранее формулу Гименца для круглого цилиндра). Для серии эллиптических цилиндров мы будем находить внешний поток теоретически, пользуясь теорией плоскопараллельных течений идеальной жидкости. Для дальнейшего нам необходимо знать распределение скоростей по поверхности эллиптического цилиндра.

Будем следовать идее Н. Е. Жуковского. Для построения потока в области внешней эллипсу достаточно знать конформную связь с областью внешней кругу и поток, обтекающий круг. Характеристическая функция, дающая поток около кругового цилиндра радиуса $r = 1$, имеет вид:

$$W(z) = U_0 \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Пусть контур эллиптического цилиндра расположен в плоскости комплексного переменного ζ . Функция, устанавливающая конформное отображение области внешней кругу плоскости (z) на область внешней эллипсу плоскости (ζ), будет иметь вид:

$$\zeta = z + \frac{\alpha^2}{z}, \quad (2)$$

¹ C. Wieselsberger, Versuche über Luftwiderstaund gerundeter und kantiger Körper. A. V, A. II Lieferung. S. 24. Göttingen.

² F. Eisner, Widerstandswessungen an umströmten Zylindern, Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Heft 4. kap II. Berlin.

где

$$\alpha^2 = \frac{a-b}{a+b} < 1,$$

причем a и b — полуоси эллипса.

Скорость по контуру эллипса вычисляется по формуле:

$$\bar{v} = u - iv = \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \right)_{\zeta = e^{i\varphi}} = U_0 \cdot \frac{1 - e^{-2i\varphi}}{1 - \alpha^2 e^{-2i\varphi}}.$$

а, следовательно, модуль скорости будет:

$$U = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{2U_0 \cdot \sin \varphi}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}}. \quad (3)$$

Необходимо отметить, что в формуле (3) угол φ отсчитывается по отображаемому круговому цилиндру. Для того, чтобы указать, какой угол $\varphi_{эл}$ будет соответствовать заданному углу φ на круге, мы разделим действительную и мнимую часть в формуле (2).

Будем иметь:

$$\zeta = \xi + i\eta = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + \alpha^2 (\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Откуда

$$\xi = (1 + \alpha^2) \cos \varphi, \quad \eta = (1 - \alpha^2) \sin \varphi.$$

Но, как видно из фиг. 15,

$$\operatorname{tg} \varphi_{эл} = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi_{эл} = \frac{b}{a} \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (4)$$

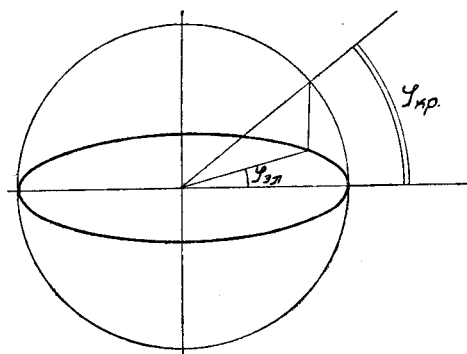
На фиг. 15 показано соответствие углов круглого цилиндра и эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 3$. Максимальная скорость у эллиптического цилиндра будет при $\varphi = \frac{\pi}{2}$; как легко видеть, модуль максимальной скорости

уменьшается с увеличением $\frac{a}{b}$. В

табл. 5 приведены значения U_{\max} и α^2 для серии эллиптических цилиндров.

Таблица 5

$\frac{a}{b}$	$\frac{U_{\max}}{U_0}$	α^2	$\frac{a}{b}$	$\frac{U_{\max}}{U_0}$	α^2
1	2	0	4	1,25	3/5
2	1,5	1/3	5	1,2	2/3
3	1,333	1/2	6	1,167	5/7
			10	1,1	9/11



Фиг. 15.

б) Определение положения точки срыва струй

Задача об определении положения точки срыва струй для серии эллиптических цилиндров была подробно исследована нами в статье, помещенной в Трудах ЦАГИ, вып. 215, поэтому здесь мы приведем только основные результаты.

Условие отрыва струй, как было показано, можно написать в виде

$$\frac{U'_\varphi}{U} \cdot \frac{S}{S'_\varphi} = -\frac{2\pi}{(4,8)^2}, \quad (5)$$

где S — длина дуги эллипса $U'_\varphi = \frac{dU}{d\varphi}$, а $S'_\varphi = \frac{ds}{d\varphi}$.

Так как

$$U = \frac{2U_0 \sin \varphi}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}},$$

то формула (5) принимает вид:

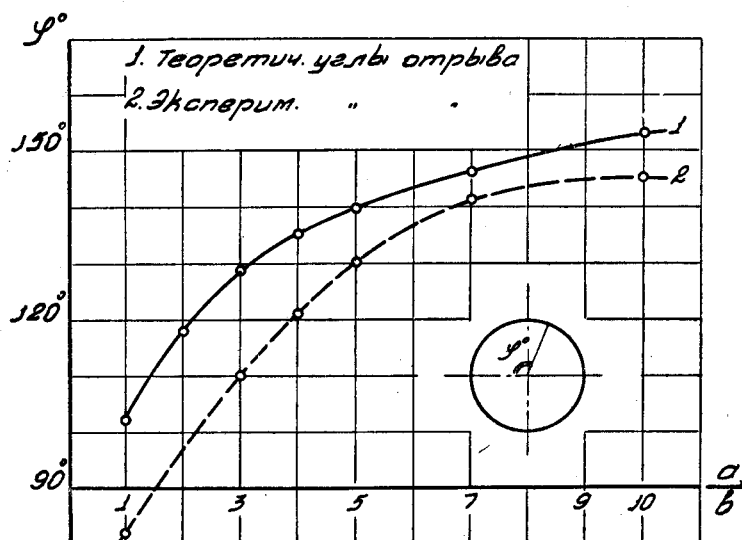
$$\frac{[(1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi) \cos \varphi - 2\alpha^2 \sin 2\varphi \cdot \sin \varphi] S}{\sin \varphi (1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi) S'_\varphi} = -\frac{2\pi}{(4,8)^2}$$

или, проводя упрощения, окончательно получим условие отрыва в виде:

$$\operatorname{ctg} \varphi - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi} = -\frac{2\pi}{(4,8)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi}, \quad (6)$$

где

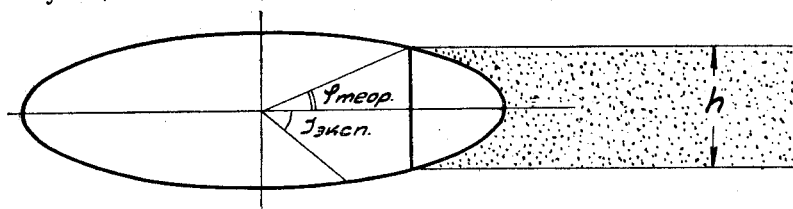
$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$



Фиг. 16. Углы отрыва струй на отображаемом круговом цилиндре в зависимости от отношения полуосей $\frac{a}{b}$

Результаты расчетов вместе с экспериментальными данными представлены на фиг. 16. Необходимо отметить, что получаемые значения φ при решении уравнения (6) будут углами отрыва на отображаемом круговом цилиндре.

Пользуясь формулой (4), мы легко находим значение углов отрыва на соответствующих эллиптических цилиндрах. Длина дуги S , которая входит в формулу отрыва очень быстро может быть сведена к эллиптическому интегралу 2-го рода, поэтому для всех расчетов мы пользовались соответствующими таблицами эллиптических функций¹.



Фиг. 17.

На фиг. 17 показано положение вычисленных точек отрыва для серии эллиптических цилиндров.

с) Формулы для подсчета вихревого сопротивления

Схема подсчета вихревого сопротивления, развитая нами на примере кругового цилиндра, легко может быть перенесена на случай течения около эллиптического цилиндра. В предыдущем параграфе приведены результаты определения положения точки срыва струй при теоретическом распределении скоростей вне пограничного слоя. Будем опять считать, что ширина дорожки Кармана в плоскости (ζ) определяется положением точек срыва струй, тогда из конформной связи областей (z) и (ζ) мы получим:

$$h = 2 \sin \varphi (1 - \alpha^2). \quad (7a)$$

Рассмотрим в плоскости комплексного переменного (z) обтекание кругового цилиндра радиуса $r=1$ с двумя внешними присоединенными вихрями z_1 и \bar{z}_1 . Отобразим конформно область течения вне цилиндра на внешнюю часть эллиптического цилиндра, расположенного в плоскости комплексного переменного (ζ). Характеристическая функция течения в плоскости (z) и функция (ζ), дающая конформную связь областей, нам известны из предыдущего (см. формулу (1) § 2 и формулу (2) § 3).

Центры вихрей z_1 и \bar{z}_1 перейдут в точки ζ_1 и $\bar{\zeta}_1$ на плоскости (ζ). Из формулы конформной связи областей:

$$\zeta = z + \frac{\alpha^2}{z} = \xi + i\eta,$$

разделяя действительную и мнимую часть, найдем расстояние между вихрями ζ_1 и $\bar{\zeta}_1$. Очевидно, это расстояние будет:

$$h = (2\eta)_{z=z_1} = 2\eta_1$$

где

$$\eta_1 = y_1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{x_1^2 + y_1^2} \right).$$

Опуская индекс и полагая $y = \rho \sin \psi$, $\frac{\alpha^2}{x^2 + y^2} = \frac{\alpha^2}{\rho^2} = \lambda^2$,

получим:

$$h = 2\rho \sin \psi (1 - \lambda^2). \quad (7)$$

¹ См. Янке и Эмде. Таблицы функций.

Сравнивая (7) и (7а), мы получаем первое уравнение, определяющее неизвестные ρ , ψ и Γ для эллиптических цилиндров в виде:

$$\sin \varphi (1 - \alpha^2) = \rho \sin \psi (1 - \lambda^2). \quad (8)$$

Подсчитаем скорость вихревого центра $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$. Как известно, при конформном отображении скорости соответственных точек не сохраняются. Для подсчета скорости произвольной точки, не совпадающей с вихревым центром, достаточно знать характеристическую функцию течения в плоскости комплексного переменного (z) и отображающую функцию

$$\zeta = \zeta(z).$$

При этом:

$$\bar{v}_\zeta = u_\zeta - iv_\zeta = \left(\frac{dw}{dz} \right) \cdot \left(\frac{dz}{d\zeta} \right), \quad (9)$$

где u_ζ и v_ζ — составляющие вектора скорости по осям координат ξ и η .

Так как траектория вихревого центра в плоскости комплексного переменного (z) не совпадает с линиями тока, то вычислять скорость вихревого центра по формуле (9) нельзя. Выясним, как преобразуется формула (9) для этого особого случая. Мы знаем, что скорость вихря в плоскости (z) можно подсчитать совершенно элементарно, зная комплексный потенциал $w(z)$. Будем иметь для вихря z_1 :

$$u_1 - iv_1 = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[\frac{dw}{dz} - \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_1)} \right]. \quad (10)$$

Если отображающая функция, дающая конформную связь областей (z) и (ζ), будет $\zeta = \zeta(z)$, то скорость центра вихря ζ_1 , соответствующего вихрю z_1 , плоскости (z) будет:

$$\bar{v}^* = u^* - iv^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \left[\frac{dw}{d\zeta} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_1} \right]. \quad (11)$$

Функция w , которая входит в (формулы (10) и (11) выражена в разных переменных. Ясно, что вместо (10) и (11) мы можем написать:

$$u_1 - iv_1 = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[w(z) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_1) \right]; \quad (12)$$

$$u^* - iv^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \frac{d}{d\zeta} \left[w(\zeta) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(\zeta - \zeta_1) \right]. \quad (13)$$

Заметим, что в полученных формулах нужно сначала проводить дифференцирование, а затем находить предел, так как может оказаться, что предел выражения, стоящего в квадратных скобках, не будет более аналитической функцией¹. Полученное уравнение (13) можно преобразовать так:

$$u^* - iv^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \frac{d}{d\zeta} \left[w - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_1) \right] + \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{d}{d\zeta} \lg \frac{z - z_1}{\zeta - \zeta_1},$$

но

$$\frac{d}{d\zeta} \left[w - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_1) \right] = \frac{d}{dz} \left[w - \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg(z - z_1) \right] \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1 = \frac{u_1 - iv_1}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1}$$

и

$$\frac{z - z_1}{\zeta - \zeta_1} = \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1 + \frac{\zeta - \zeta_1}{2} \cdot \left(\frac{d^2z}{d\zeta^2} \right)_1 + \dots$$

¹ См. А. Вилла. Теория вихрей. 1936.

Поэтому:

$$\lim_{\zeta=\zeta_1} \frac{d}{d\zeta} \lg \frac{z-z_1}{\zeta-\zeta_1} = \lim_{\zeta=\zeta_1} \frac{d}{d\zeta} \lg \left(\frac{dz}{d\zeta} \right) \left[1 + \frac{\zeta-\zeta_1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{d^2 z}{d\zeta^2} \right)_1}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1} + \dots \right] = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{d^2 z}{d\zeta^2} \right)_1}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1}.$$

Таким образом, скорость вихревого центра ζ_1 в плоскость комплексного переменного ζ будет вычисляться по формуле:

$$u^* - iv^* = \frac{u_1 - iv_1}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1} + \frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\left(\frac{d^2 z}{d\zeta^2} \right)_1}{\left(\frac{dz}{d\zeta} \right)_1}. \quad (14)$$

Или, так как

$$\frac{d^2 z}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta} \left[\frac{1}{\zeta'} \right] = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\zeta'} \right) \frac{dz}{d\zeta},$$

то

$$u^* - iv^* = \frac{u_1 - iv_1}{\zeta'_1} - \frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{(\zeta'')_1}{(\zeta'_1)^2}. \quad (15)$$

В нашем случае

$$w(z) = U_0 \left(z + \frac{1}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \lg \cdot \frac{\left(z - z_1 \right) \left(z - \frac{1}{z_1} \right)}{\left(z - \bar{z}_1 \right) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_1} \right)},$$

где

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1,$$

а

$$\zeta = z + \frac{\alpha^2}{z}.$$

Но u_1 и v_1 есть не что иное, как скорости присоединенных вихрей в плоскости кругового цилиндра, равные:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_0 \left(1 + \frac{\cos 2\psi}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \rho \sin \psi \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \psi} \right] \\ -v_1 &= U_0 \frac{\sin 2\psi}{\rho^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \rho \cos \psi \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_1} &= \frac{1}{1 - \lambda^2 e^{-2i\psi}} = \frac{1}{(1 - \lambda^2 \cos 2\psi) + i\lambda^2 \sin 2\psi} = \\ &= \frac{1}{\alpha_1 + i\beta_1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 - \lambda^2 \cos 2\psi, \\ \beta_1 = \lambda^2 \sin 2\psi. \end{cases}$$

Мы можем поэтому скорость внешнего присоединенного вихря ζ_1 записать окончательно в виде:

$$u^* - iv^* = \frac{(u_1 - iv_1)(\alpha_1 - i\beta_1)}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\alpha^2 z}{(z^2 - \alpha^2)^2}, \quad (16)$$

откуда

$$u^* = (\alpha_1 u_1 - \beta_1 v_1) \cdot \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} - \frac{\Gamma \cdot \alpha^2}{2\pi} \cdot \frac{2x_1 p q - y_1(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}; \quad (17)$$

$$v^* = (\alpha_1 v_1 + \beta_1 u_1) \cdot \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\Gamma \alpha^2}{2\pi} \cdot \frac{2y_1 p q + x_1(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}, \quad (18)$$

где

$$p = (x_1^2 - y_1^2 - \alpha^2) = \rho^2 \cos 2\psi - \alpha^2;$$

$$q = 2x_1 y_1 = \rho^2 \sin 2\psi.$$

Полагая, как и ранее, скорость вполне сформировавшегося вихря по нормали к дорожке равной нулю (сформировавшийся вихрь движется параллельно вектору скорости \vec{U}_0), мы найдем:

$$\alpha_1 v_1 + \beta_1 u_1 + B_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} = 0,$$

где

$$B_1 = \frac{2y_1 p q + x_1(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2} \cdot \alpha^2$$

или, подставляя вместо α_1 , β_1 , u , v их значения, будем иметь:

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0} = \frac{(1 - \lambda^2 \cos 2\psi) \frac{\sin 2\psi}{\rho^2} - \lambda^2 \sin 2\psi \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\rho^2}\right)}{\lambda^2 \sin 2\psi \cdot \rho \cdot \sin \psi \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \psi} \right] - (1 - \lambda^2 \cos 2\psi) \left[\frac{1}{\rho^2 - 1} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) B \right]}$$

Но так как

$$(1 - \lambda^2 \cos 2\psi) \frac{\sin 2\psi}{\rho^2} - \lambda^2 \sin 2\psi \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\rho^2}\right) = \frac{\sin 2\psi}{\rho^2} \cdot (1 - \alpha^2),$$

где

$$\alpha^2 = \frac{a - b}{a + b},$$

а

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \sin 2\psi \cdot \rho \sin \psi \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \psi} \right] - \\ & - (1 - \lambda^2 \cos 2\psi) \cdot \rho \cos \psi \cdot \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} \right] = \\ & = \frac{2\rho \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot (\rho^2 - \lambda^2)}{\sigma} - \frac{\lambda^2 \cos \psi}{\rho}, \end{aligned}$$

где

$$\sigma = (\rho^2 - 1)(1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi),$$

то, подставляя преобразованные значения числителя и знаменателя в (18a), получим:

$$(1 - \alpha^2) \cdot \frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{2\rho \sin \psi (\rho^4 - \alpha^2)}{\sigma} - \frac{\alpha}{2\rho \sin \psi} + \frac{B_1 \rho^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\sin 2\psi}. \quad (19)$$

Формула (19) дает второе соотношение для определения неизвестных.

Заметим, что при $\alpha^2 = 0$ (круговой цилиндр) формула (19) переходит в хорошо известную нам формулу (§ 2):

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{2\rho^5 \sin \psi}{\sigma} = \frac{h\rho^4}{\sigma}.$$

В дальнейшем нам необходимо знать распределение скоростей по поверхности эллипса с двумя присоединенными внешними вихрями. Из теории плоско-параллельных течений известно, что для этого нужно знать характеристическую функцию $w(z)$ около цилиндра с двумя внешними вихрями и конформную связь областей (z) и (ζ) . Но эти формулы нами уже получены.

Обозначая $\vec{U}_{\text{эл}}$ комплексную скорость по контуру эллиптического цилиндра, будем иметь:

$$\vec{U}_{\text{эл}} = \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \right)_{z=e^{i\varphi}},$$

откуда:

$$U_{\text{эл}}^2 = \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{d\bar{z}}{d\zeta} \right)_{z=e^{i\varphi}} = U_{\text{цил}}^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{dz} \right)_{z=e^{i\varphi}}}.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{dz} \right)} = \omega^2,$$

тогда

$$U_{\text{эл}}^2 = U_{\text{цил}}^2 \cdot \omega^2,$$

где $U_{\text{эл}}$ есть модуль скорости по поверхности эллиптического цилиндра с парой внешних вихрей ζ_1 и $\bar{\zeta}_1$, $U_{\text{цил}}$ — есть модуль скорости по поверхности кругового цилиндра и как было показано:

$$U_{\text{цил}} = 2U_0 \sin \varphi \cdot \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right].$$

Так как $\zeta = z + \frac{\alpha^2}{z}$, то, очевидно,

$$\omega^2 = \frac{1}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}.$$

Окончательная формула распределения скоростей по контуру эллиптического цилиндра обтекаемого потоком идеальной жидкости с двумя присоединенными вихрями будет иметь вид:

$$U_{\text{эл}} = 2U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}}. \quad (20)$$

Необходимое нам третье соотношение, связывающее величины ρ , ψ и Γ , нельзя получить, пользуясь математическим аппаратом теории идеальной жидкости; для этого необходимо привлечь к рассмотрению экспериментальный материал, полученный при качественном изучении течений

около эллиптических цилиндров. Будем сначала заимствовать из эксперимента положение точек срыва струй.

Теоретически место отрыва струй от эллиптического цилиндра, как нами уже указывалось, будет определяться формулой:

$$\frac{U'_{\text{эл}}}{U_{\text{эл}}} = - \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{S'_{\varphi}}{S},$$

где S — длина дуги эллипса, а индекс φ указывает на дифференцирование на углу φ .

Так как

$$U_{\text{эл}} = U_{\text{цил}} \omega,$$

то

$$U'_{\varphi \text{ эл}} = U'_{\varphi \text{ цили}} \cdot \omega + U_{\text{цил}} \omega'_{\varphi},$$

следовательно,

$$\frac{U'_{\text{эл}}}{U_{\text{эл}}} = \frac{U'_{\text{цил}}}{U_{\text{цил}}} + \frac{\omega'_{\varphi}}{\omega}.$$

Но по предыдущим формулам:

$$\frac{U'_{\text{цил}}}{U_{\text{цил}}} = \text{ctg } \varphi - \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right],$$

где

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \rho \cdot \sin \psi \cdot 2 \cdot (\rho^2 - 1)$$

и

$$\frac{\omega'_{\varphi}}{\omega} = - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha \cos 2\varphi}.$$

Теоретическая формула отрыва струй напишется теперь в виде:

$$\begin{aligned} & \text{ctg } \varphi + \frac{2\pi}{(4.8)^2} \cdot \frac{S'_{\varphi}}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha \cos 2\varphi} = \\ & = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right], \end{aligned} \quad (21)$$

причем

$$R_1 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi + \psi);$$

$$R_2 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - \psi),$$

и

$$\frac{S'_{\varphi}}{S} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}{\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

Если в формулу (21) подставить вместо произвольного φ найденный из эксперимента угол отрыва φ_0 , то тогда (21) и дает третье необходимое условие для подсчета всех неизвестных нашей задачи.

Итак, подсчет вихревого сопротивления серии эллиптических цилиндров сводится к решению следующих трех уравнений:

$$h = 2\rho \sin \psi (1 - \lambda^2);$$

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{2\rho^2 \sin \psi \cdot (\rho^2 - \lambda^2)}{\sigma \cdot (1 - \alpha^2)} - \frac{\alpha^2}{2\rho \sin \psi \cdot (1 - \alpha^2)} + \frac{B_1 \rho^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{(1 - \alpha^2) \sin 2\psi};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi_0 + 0,273 \cdot \frac{S'_{\varphi}}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi_0}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi_0} = \\ = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\psi_0 + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_0 - \psi)}{R_2} \right]. \end{aligned}$$

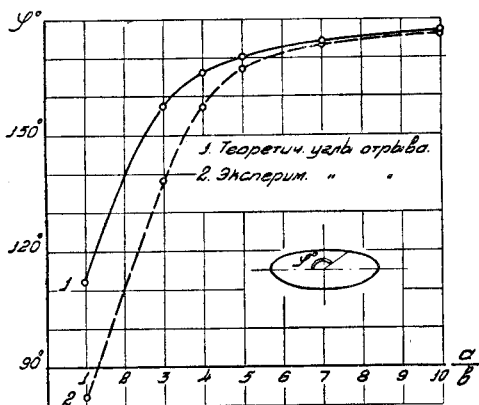
Положение точек срыва у серии эллиптических цилиндров в реальном потоке маловязкой жидкости мы заимствовали из опубликованных работ различных экспериментаторов. Для эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 4$ мы

взяли угол отрыва из статьи Прандтля¹, для $\frac{a}{b} = 1$ мы берем результат

Гименца², для $\frac{a}{b} = 2, 3, 5$ и 10 ре-

зультаты взяты из работ гидроаэродинамической лабораторий МГУ³.

Исходные экспериментальные данные для серии эллиптических цилиндров представлены на фиг. 18 и вместе с теоретическими углами отрыва приведены в табл. 6, где также отмечена разность между теоретическими и экспериментальными значениями углов отрыва. Предлагаемый метод определения фундаментально связан с разностью $\Delta\varphi$, и чем больше эта разность между экспериментальным и теоретическим значением угла отрыва, тем больше величина циркуляции Γ внешних присоединенных вихрей.



Фиг. 18. Углы отрыва струй от эллиптических цилиндров в зависимости от отношения полуосей

Таблица 6

Положение точек срыва струй на отбрасываемом единичном круге

$\frac{a}{b}$	φ_0 экспериментальный	φ_0 теоретический	$\Delta\varphi = \varphi_T - \varphi_0$
1	82°	112°	30°
3	110°	130°	20°
4	121°	135°	14°
5	130°	139°	9°
7	141°	144°	3°
10	145°	154°	9°

Положение точек срыва струй на эллиптических цилиндрах (φ отсчитывается от передней критической точки)

$\frac{a}{b}$	φ_0 экспериментальный	φ_0 теоретический	$\Delta\varphi = \varphi_T - \varphi_0$
1	82°	112°	30°
3	138°	157°	19°
4	157°	166°	9°
5	167°	170°	3°
7	173°	174° 20'	1° 20'
10	176°	177°	1°

¹ L. Prandtl. Einführung in die Grundgriffe der Strömungslehre. Handbuch der Experim. Physik Bd IV, t. I.

² K. Hiemenz. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten Kreiszyylinder. Dingler. Politech. Journal 326. 1911. Стр 321.

³ Работы ставились в качестве дипломных сочинений студентами Шевцовым (Гидродинамическая лаборатория) и Сагиновым (Аэролаборатория). Работы не опубликованы.

д) Результаты расчетов вихревого сопротивления по заданной точке срыва

Мы провели расчет для трех эллиптических цилиндров с отношением полуосей $\frac{a}{b} = 3, 4$ и 7 . Исходные формулы имеют следующий вид:

$$\sin \varphi_T (1 - \alpha^2) = \rho \sin \psi (1 - \lambda^2)$$

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \cdot \left[\frac{2\rho^3 \sin \psi \cdot (\rho^2 - \lambda^2)}{\sigma} - \frac{\alpha^2}{2\rho \sin \psi} + \frac{B_1 \rho^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\sin 2\psi} \right],$$

где

$$\left(\frac{1}{\alpha^2} B_1 \right) = \frac{2y_1 p q + x_1 (p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi_0 + 0,273 \cdot \frac{S_{\varphi}'}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi_0}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi_0} = \\ = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_0 + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_0 - \psi)}{R_2} \right] \end{aligned}$$

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot (\rho^2 - 1) \cdot 2\rho \sin \psi.$$

Для эллиптического цилиндра с отношением $\frac{a}{b} = 3$, $\varphi_0 = 110^\circ$ (на отображаемом единичном круге). Как мы указывали:

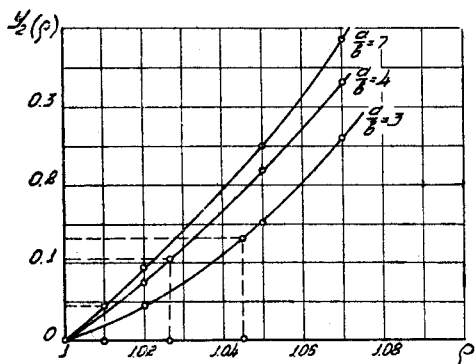
$$h = 2 \sin \varphi_T (1 - \alpha^2),$$

где $\alpha^2 = \frac{a-b}{a+b}$ и φ_T — теоретический угол отрыва, равный 130° (фиг. 16 и 18). Поэтому $h = 0,766$.

Обозначив

$$Y_1 = \operatorname{ctg} \varphi_0 + 0,273 \cdot \frac{S_{\varphi}'}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi_0}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi_0};$$

$$Y_2 = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_0 + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_0 - \psi)}{R_2} \right],$$



Фиг. 19.

мы легко находим, что

$$Y_1 = -0,364 + 0,177 + 0,317 = 0,13.$$

На фиг. 19 дана зависимость $Y_2 = Y_2(\rho)$ и на фиг. (20) $\frac{2\pi U_0}{\Gamma}$, как $f(\rho)$, для разных отношений полуосей эллиптических цилиндров. Для нашего случая точка пересечения прямой $Y_1 = 0,13$ и кривой $Y_2(\rho)$ происходит при $\rho \cong 1,050$. Для этого значения ρ

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = 8,40,$$

и, следовательно, циркуляция присоединенного вихря ζ_1 будет:

$$\Gamma = 0,75 U_0.$$

Пользуясь вышеприведенными формулами Кармана, легко находим, что

$$\frac{u}{U_0} = 0,097 \quad \text{и} \quad C_{x.v} \cong 0,2,$$

так как из условия устойчивости

$$l = 2,74,$$

а $2b = 2(1 - \alpha^2) = 1.$

Площадь миделя в этом случае равна ($S = 2b \cdot l$).

Для эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 4$ соответственные цифры будут:

$$h = 0,565, \quad \varphi_0 = 121^\circ,$$

$$\varphi_T = 135^\circ, \quad 2b = 0,8,$$

$$l = 2,02, \quad Y_2 = 0,108.$$

По приведенному на фиг. 19 графику находим:

$$\rho = 1,025$$

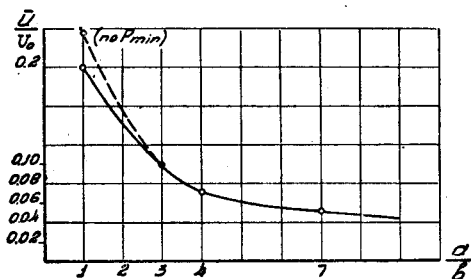
$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} = 15,4, \quad \text{т. е.}$$

$$\Gamma = 0,4 U_0.$$

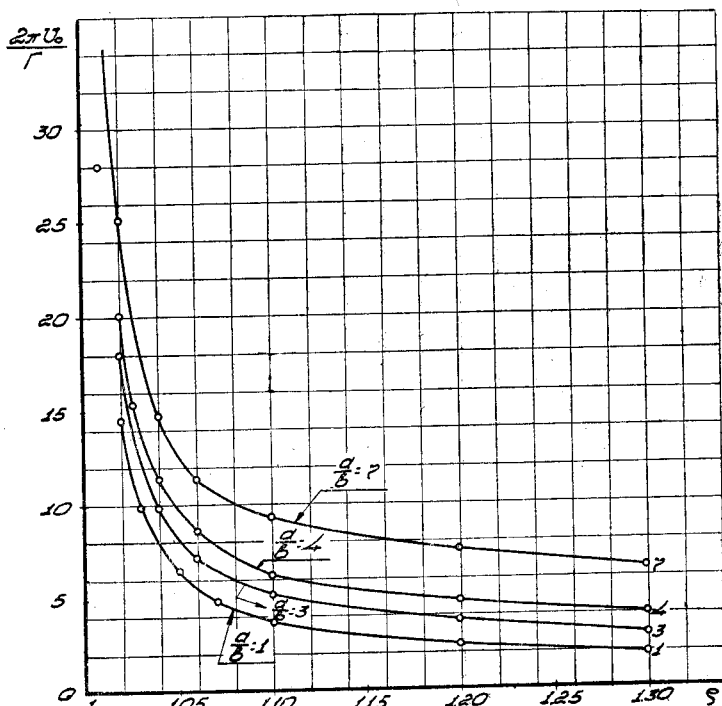
По формулам Кармана получаем $\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,07$ и $C_{x.v} = 0,135$. Для эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 7$ мы аналогично будем иметь:

$$\Gamma = 1,167 U_0 \quad \frac{\bar{u}}{U_0} = 0,056 \quad \text{и} \quad C_{x.v} = 0,09.$$

Полученные цифры для коэффициента вихревого сопротивления справедливы только в ламинарной области течения.



Фиг. 21.



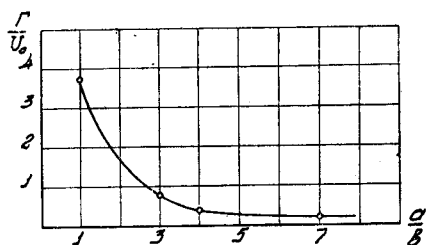
Фиг. 20.

Основные результаты, полученные нами для эллиптических цилиндров, можно сформулировать так.

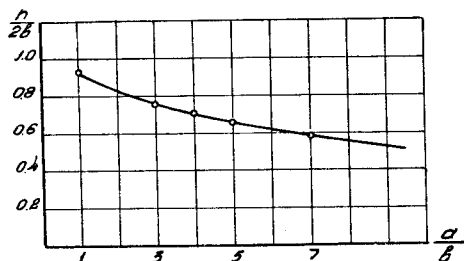
1. С увеличением отношения полуосей $\frac{a}{b}$ скорость вихревой дорожки, как целого, сильно уменьшается (фиг. 21). Сбегающие вихри движутся со скоростью, мало отличающейся от скорости невозмущенного потока U_0 . Очевидно, в предельном случае мы получим вихревую пелену, скорость которой не отличается от U_0 .

2. С увеличением отношения $\frac{a}{b}$ циркуляция присоединенных вихрей,

а, следовательно, и циркуляция вихрей дорожки Кармана быстро уменьшается. Ширина вихревой дорожки также убывает (фиг. 22 и 23).



Фиг. 22. Изменение циркуляции вихрей дорожки Кармана за эллиптическими цилиндрами

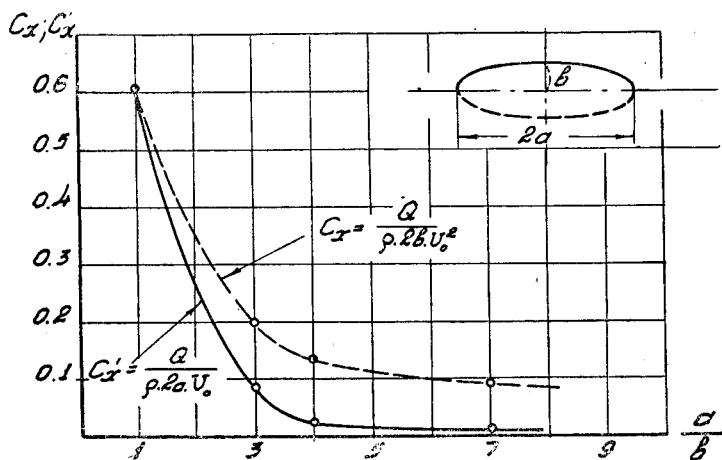


Фиг. 23.

3. Коэффициент $C_{x'} = \frac{b}{a} C_{x \cdot v}$ уменьшается с увеличением отношения $\frac{a}{b}$, коэффициент вихревого сопротивления равный

$$C_{x \cdot v} = \frac{\text{вихревое сопротивление}}{\rho \cdot 2b \cdot U_0^2}$$

убывает с увеличением $\frac{a}{b}$ гораздо медленнее (фиг. 24).



Фиг. 24.

4. Если нанести на график величины коэффициентов вихревого сопротивления в функции отношения $\frac{U_{\max}}{U_0}$ теоретического потока, то получается очень существенный результат. Чем равномернее распределение скоростей по поверхности цилиндра, тем меньше его вихревое сопротивление. (Заметим, что этот вывод справедлив только для данного режима течения).

Приводимые здесь результаты вполне удовлетворительно подтверждаются экспериментами¹. На графиках приводимых ниже, мы везде отмечаем экспериментальные точки, заимствованные из указанных источников, беря их для самых низких чисел Рейнольдса (все опыты ставились в переходной области).

¹ А. Hartshorn. Wind. Tunnel Tests of Seven Struts. Report and Memoranda № 1327.

Р. Warden. Resistance of certain Strut Forms. Reports and Memoranda № 1599. 1935.

е) Второй способ определения циркуляции присоединенных вихрей

В предыдущих параграфах мы определяли циркуляцию присоединенных вихрей, заимствуя из эксперимента положение точки срыва струй. Так как определение точки срыва при эксперименте возможно только визуальными методами и, главным образом, для ламинарной области течения, то мы предлагаем более простой и надежный метод определения циркуляции.

Оставляя неизменными первые два условия, мы будем попрежнему иметь:

$$h = 2\rho \sin \psi (1 - \lambda^2); \quad (22)$$

$$\frac{2\pi U_0}{\Gamma} \cdot (1 - \alpha^2) = \frac{2\rho^3 \sin \psi \cdot (\rho^2 - \lambda^2)}{\sigma} - \frac{\alpha^2}{2\rho \sin \psi} + \frac{B_1 \rho^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{\sin 2\psi}. \quad (23)$$

Реальный поток около кругового цилиндра отличается от нашего теоретического распределением давлений по контуру цилиндра. Мы считаем, что если потребовать совпадения точек минимума давления для реального и искусственного потоков, то картина распределения давлений по передней части цилиндра будет близка к реальной, но это дает еще одно условие для подсчетов циркуляции вихрей. Действительно, условие совпадения минимумов давлений можно написать в виде:

$$(U'_{\varphi, \text{эл}})_{\varphi=\varphi_{\min}} = 0$$

или

$$U_{\text{цил}} \cdot \omega + U_{\text{цил}} \omega'_{\varphi} = 0. \quad (24)$$

Так как в области минимума давлений $U_{\text{цил}} \neq 0$ и $\omega \neq 0$, то из (20) мы разделив на $U_{\text{цил}} \omega$, получаем:

$$\frac{U'_{\text{цил}}}{U_{\text{цил}}} + \frac{\omega'_{\varphi}}{\omega} = 0. \quad (25)$$

Но

$$\frac{U'_{\text{цил}}}{U_{\text{цил}}} = \text{ctg } \varphi - \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)'}{R_2} \right]$$

$$\frac{\omega'_{\varphi}}{\omega} = - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}.$$

Поэтому условие (24) можно написать в виде:

$$\text{ctg } \varphi_m - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi_m}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi_m} =$$

$$= \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_m + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_m - \psi)}{R_2} \right]. \quad (26)$$

Формулы (22), (23) и (26) позволяют решить задачу о подсчете циркуляции до конца.

Преимущество формулы (26) состоит в том, что она не зависит от режима течения, а, следовательно, приведенные формулы пригодны для расчетов как в ламинарной, так и в турбулентной области.

Мы провели расчет по предлагаемому способу только для первого эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 3$. Данные о минимуме давления заимствованы из работы Шубауэр¹.

¹ G. B. Schubauer. Air-flow in a separating laminar boundary layer. Reports and Memoranda № 527. 1935.

Оказывается, что при $Re = 24\,000$ (т. е. в ламинарной области течения) $\left(\frac{S}{a}\right)_{\varphi_{\min}} = 0,867$, на эллиптическом цилиндре φ_{\min} , равно 75° , на отображаемом круговом цилиндре в плоскости переменного (z) φ_{\min} будет равно 85° , согласно формулы (4), § 3а.

Ширину вихревой дорожки будем вычислять по теоретической точке срыва. В этом случае $h = 0,766$.

Вычисления, проведенные по формулам (22), (23) и (26) дают:

$$\rho = 1,045 \quad \Gamma = 0,7 U_0; \quad \frac{\bar{u}}{U_0} = 0,09 \quad C_{x.в} = 0,19.$$

Как видно, полученный результат очень мало отличается от ранее полученного коэффициента вихревого сопротивления¹.

Для того, чтобы получить полное лобовое сопротивление эллиптических цилиндров, нужно подсчитать еще сопротивление трения.

Имеем, по гипотезе Ньютона, $\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$. Суммарное сопротивление трения будет:

$$R = \int_0^{\varphi_0} \tau_0 \cos(\bar{V}_0, \bar{\tau}_0) ds.$$

Вычисления, проведенные нами ранее, дают² для коэффициентов сопротивления трения

$$C_{x.тр} = \frac{R}{\rho 2b U_0^2}$$

следующие значения:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = 1 \quad C_{x.тр} &= \frac{1,82}{\sqrt{Re}}; & \frac{a}{b} = 3 \quad C_{x.т} &= \frac{2,9}{\sqrt{Re}}; \\ \frac{a}{b} = 4 \quad C_{x.тр} &= \frac{3,35}{\sqrt{Re}}; & \frac{a}{b} = 7 \quad C_{x.т} &= \frac{4,2}{\sqrt{Re}}. \end{aligned}$$

Таким образом для наших эллиптических цилиндров полный C_x будет написан так:

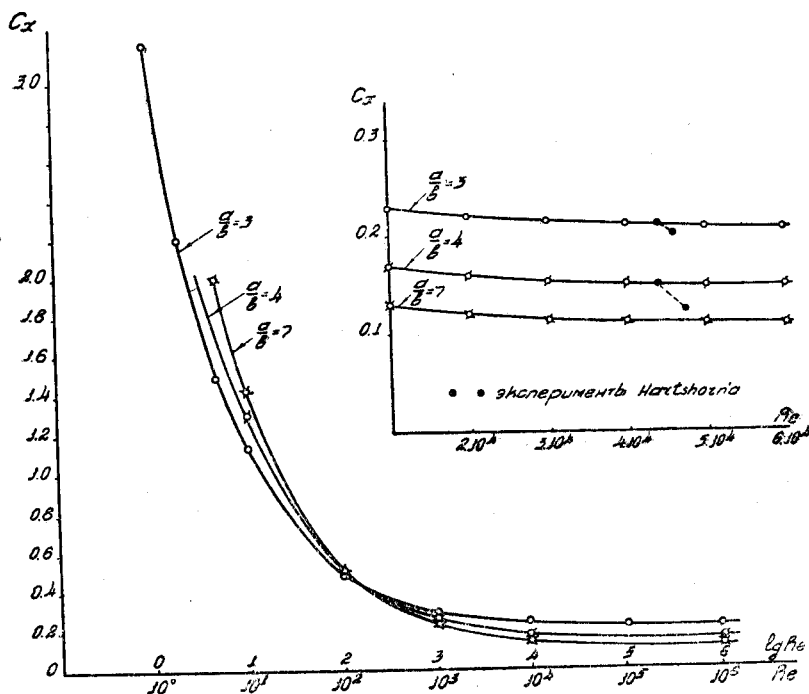
$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = 3 \quad C_x &= 0,2 + \frac{2,9}{\sqrt{Re}}; \\ \frac{a}{b} = 4 \quad C_x &= 0,135 + \frac{3,35}{\sqrt{Re}}; \\ \frac{a}{b} = 7 \quad C_x &= 0,09 + \frac{4,2}{\sqrt{Re}}. \end{aligned}$$

Так как положение точки срыва струй было взято при $Re = 24\,000$ и ниже, то экспериментальные точки показаны для самого низкого числа Рейнольдса, полученного в опытах (фиг. 25).

¹ Это подтверждает правильность формулы отрыва для хорошо обтекаемых тел, которой мы пользуемся на протяжении всей нашей работы.

² См. Космодемьянский. О сопротивлении трения. „Техника воздушного флота“ № 3 за 1937 г.

К сожалению, мы не располагали картинами распределения давлений по контуру хотя бы одного эллиптического цилиндра при больших числах



Фиг. 25.

Рейнольдса (переходный и турбулентный режимы), поэтому конкретных результатов для этой области течения здесь не приводится. Проведенные выше расчеты для круглого цилиндра позволяют утверждать, что предлагаемый нами метод должен привести к хорошим результатам и в этом случае.

4. ВИХРЕВОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ КРЫЛЬЕВ ТИПА Н. Е. ЖУКОВСКОГО И С. А. ЧАПЛЫГИНА

а) Построение потенциального потока

Возьмем в плоскости комплексного переменного (z) окружность радиуса $a < 1$ и отображим внешнюю часть плоскости (z) конформно помощью функции:

$$\zeta = z_1 + \frac{a^2}{z_1}.$$

Очевидно, контур окружности при таком преобразовании перейдет на плоскости ζ в отрезок длиной $(4a)$. Внешняя часть плоскости (z) перейдет во внешнюю часть плоскости (ζ).

Возьмем далее на плоскости (z) вторую окружность, охватывающую первую, радиуса $R = 1$ и расположенную так, что ось Ox для обеих окружностей является осью симметрии (фиг. 26).

Кратчайшее расстояние между точками окружностей, расположенных на одном радиусе, обозначим через b ; расстояние между центрами окружностей $OO_1 = \varepsilon$. Имеем тогда $a + b + \varepsilon = 1$.

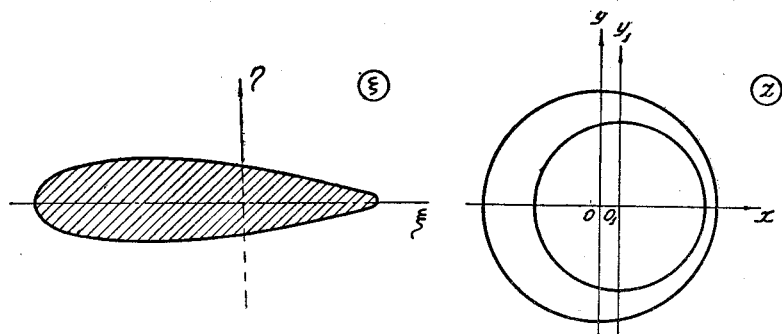
Перенесем начало координат в плоскости (z) из точки O_1 в точку O — центр круга $R=1$; тогда

$$z_1 = z - \varepsilon$$

и формула (1) принимает вид:

$$\zeta = z - \varepsilon + \frac{a^2}{z - \varepsilon}. \quad (2)$$

Формула (2) дает конформное преобразование круга радиуса $R=1$ в профиль симметричного крыла типа С. А. Чаплыгина.



Фиг. 26.

Если $b=0$, тогда $a=1-\varepsilon$ и формула (2) дает конформное преобразование круга $R=1$ в профиль симметричного крыла Н. Е. Жуковского. Пользуясь (2), мы легко получим параметрические уравнения профиля крыла, если положим $z = e^{i\varphi}$ и $\zeta = \xi + i\eta$.

Действительно, разделяя реальную и мнимую части, будем иметь:

$$\xi = (\cos \varphi - \varepsilon) + \frac{a^2 (\cos \varphi - \varepsilon)}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi};$$

$$\eta = \sin \varphi - \frac{a^2 \sin \varphi}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi}.$$

Полагая $1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi = m$, получим уравнение профиля Чаплыгина в виде:

$$\xi = (\cos \varphi - \varepsilon) \cdot \left[1 + \frac{a^2}{m} \right]. \quad (3)$$

$$\eta = \sin \varphi \cdot \left[1 - \frac{a^2}{m} \right]. \quad (4)$$

Параметрические уравнения профиля НЕЖ, очевидно, будут:

$$\xi = (\cos \varphi - \varepsilon) \left(1 + \frac{(1 - \varepsilon^2)}{m} \right); \quad (5)$$

$$\eta = \sin \varphi \cdot \left(1 - \frac{(1 - \varepsilon^2)}{m} \right). \quad (6)$$

Хорда крыла будет:

$$t = \xi_{\varphi=0} - \xi_{\varphi=\pi} = 2 \left[1 + \frac{a^2}{1 - \varepsilon^2} \right], \quad (7)$$

а максимальная толщина

$$d_{\max} = 2\eta_{\max}.$$

Для тонких крыльев Жуковского (малые значения ε) максимальная толщина может вычисляться по формуле ¹:

$$d_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (8)$$

Величины t и d_{\max} вполне характеризуют данный тип крыльев.

Для того, чтобы построить поток около данного профиля, обтекаемого при любом угле атаки, нужно знать поток около кругового цилиндра с циркуляцией и конформную связь областей (z) и (ξ) .

Предположим, что направление скорости потока, обтекающего круглый цилиндр радиуса $R=1$, совпадает в бесконечности с осью Ox . Тогда, как известно, характеристическая функция течения будет:

$$w(z_1) = U_0 \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \lg z_1. \quad (9)$$

Повернем поток на угол θ , положив $z_1 = ze^{i\theta}$, тогда характеристическая функция течения принимает форму:

$$w(z) = U_0 \left(z + \frac{e^{i\theta}}{z} \right) e^{-i\theta} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \lg z + \text{const.} \quad (10)$$

Ясно, что

$$\bar{V}_2 = u - iv = Ue^{-i\theta} \left[1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right] + \frac{i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}. \quad (11)$$

Циркуляция определяется по условию Жуковского

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=1} = 0,$$

откуда

$$\frac{i\Gamma}{2\pi} = -U_0 e^{-i\theta} \cdot (1 - e^{2i\theta}).$$

Таким образом получаем, что скорость в плоскости (z) будет вычисляться по формуле:

$$\bar{V}_2 = U_0 e^{-i\theta} \left[\left(1 - \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right) - \left(1 - e^{i\theta} \right) \cdot \frac{1}{z} \right] \quad (12)$$

или

$$\bar{V}_2 = U_0 e^{-i\theta} \left[\frac{1}{z} + \frac{e^{2i\theta}}{z^2} \right] \cdot (z - 1). \quad (13)$$

Распределение скоростей по контуру цилиндра в этом случае будет вычисляться так:

$$u - iv = U_0 e^{-i\theta} [e^{-i\varphi} + e^{2i(\theta - \varphi)}] \cdot (e^{i\varphi} - 1),$$

а, следовательно, модуль скорости:

$$U_{\text{цил}}^2 = u^2 + v^2 = 16U_0^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (14)$$

¹ См., например, Aerodynamik Theory. Vol. II, p. 71.

Зная конформную связь областей (z) и (ζ) , мы сразу можем теперь написать формулу распределения скоростей по крылу Чаплыгина. Действительно, так как

$$\frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}\right)} = \frac{m^2}{(a-m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} \quad (15)$$

и

$$U_{\zeta} = \sqrt{\left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right) \cdot \frac{1}{\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{z}}}},$$

то, очевидно,

$$U_{\zeta} = \frac{4U_0 m \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{(a-m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

Из формулы (16) легко получить распределение скоростей по крылу типа руля Жуковского, положив $a = 1 - \varepsilon$. Будем иметь после простых преобразований:

$$U_{\zeta_{\text{НЕЖ}}} = \frac{U_0 m \cdot \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = U_0 \frac{m}{n} \cdot \cos \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right), \quad (17)$$

где

$$n^2 = \varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon) \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad m = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi.$$

Пользуясь (16) и (17), можно получить теоретическую кривую распределения давлений. В самом деле, применяя интеграл Бернулли, имеем:

$$\frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cos^2 \left(\theta - \frac{\varphi}{2}\right). \quad (18)$$

в) Определение точки срыва струй

Для определения вихревого сопротивления серии симметричных профилей мы должны знать положение точек срыва струй. Ограничимся в данной работе подсчетом вихревого сопротивления крыльев только для нулевого угла атаки. В этом случае распределение скоростей вне пограничного слоя будет:

$$U_{\zeta} = \frac{m}{n} \cdot U_0 \cos \frac{\varphi}{2} \quad (19)$$

для крыльев Жуковского и

$$U_{\zeta} = \frac{2U_0 m \cdot \sin \varphi}{\sqrt{(a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}} \quad (20)$$

для крыльев Чаплыгина.

Как мы уже неоднократно указывали положение точки отрыва струй с достаточной для практики точностью, можно определить из формулы:

$$\frac{U'_{\varphi}}{U} \cdot \frac{S}{S'_{\varphi}} = -\frac{2\pi}{(4,8)^2}, \quad (21)$$

где S — длина дуги крыла, считаемая от передней критической точки $S'_\varphi = \frac{dS}{d\varphi}$ и $U'_\varphi = \frac{dU}{d\varphi}$.

Из формулы (20) имеем:

$$\frac{U'_\varphi}{U} = \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\varepsilon}{m} \cdot \sin \varphi - \frac{2 \sin \varphi [2a^2 \cos \varphi - \varepsilon(a^2 - m)]}{(a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} = \Phi(a, \varepsilon, \varphi).$$

Длина дуги профиля крыла легко может быть определена из параметрических уравнений профиля. Очевидно будем иметь:

$$\frac{S'_\varphi}{S} = F(a, \varepsilon, \varphi).$$

Обозначив $\frac{2\pi}{(4,8)^2}$ через k , мы можем написать условие отрыва в виде:

$$\Phi + k \cdot F = 0. \quad (22)$$

Не приводя здесь вычислений, довольно громоздких, мы укажем только на основные полученные результаты¹. Оказывается, что:

1. Симметричные крылья типа Н. Е. Жуковского до $\varepsilon = 0,075$ (11% толщина) обтекаются реальным ламинарным потоком маловязкой жидкости без срыва струй. Очевидно, этот результат можно считать справедливым и для турбулентного потока.

2. Для крыльев типа Чаплыгина безотрывное обтекание теоретически невозможно (крылья этого типа имеют при обтекании идеальной жидкостью две критических точки). Однако, угол отрыва, а, следовательно, и ширина вихревой дорожки до 13% толщины, так малы, что можно считать их при всех расчетах равными нулю.

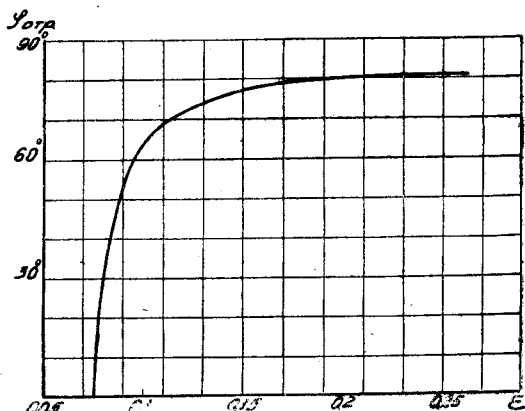
3. Для крыльев типа Жуковского, начиная с 11% толщины и, примерно, до 25% толщины точка отрыва весьма быстро перемещается от хвоста к передней критической точке (фиг. 27).

4. Угол отрыва φ по формуле (22) находится сначала на отображаемом круговом цилиндре в плоскости комплексного переменного (z). Для пересчетов на крыло нужно пользоваться параметрическими уравнениями профиля.

Заметим, что вычисления длины дуги крыльев типа Чаплыгина приходится выполнять графически, пользуясь формулой:

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{1}{m} \cdot \sqrt{(m - a^2)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2};$$

¹ Вычисления для крыльев НЕЖ достаточно подробно приведены в Трудах ЦАГИ вып. 215; решение для крыльев Чаплыгина будет опубликовано в трудах Института механики МГУ за 1936 г.



Фиг. 27. Положение точек срыва струй для крыла НЕЖ (φ на отображаемом круговом цилиндре)

для тонких крыльев Н. Е. Жуковского ($\varepsilon \leq 0,1$) длина дуги вычисляется гораздо проще, так как $\int \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}$ можно взять. Мы нашли, что

$$S = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon^2-2\varepsilon \cos \varphi}{(1+\varepsilon)^2}.$$

с) Формулы для подсчета вихревого сопротивления крыльев

Пусть контур крыла расположен в плоскости комплексного переменного ζ . Как мы уже указывали, конформная связь плоскостей (z) и (ζ) напишется в виде:

$$\zeta = (z - \varepsilon) + \frac{a^2}{z - \varepsilon}.$$

Найдем далее поток около крыла с двумя присоединенными вихрями, для чего отобразим конформно поток около цилиндра радиуса $R=1$ с двумя присоединенными вихрями на плоскость (ζ) .

Чтобы определить расстояние между вихрями в плоскости (ζ) , мы должны в формуле конформной связи областей заменить z на $z_1 = x_1 + iy_1$ и найти коэффициент при i .

Будем иметь:

$$\xi + i\eta = x_1 - \varepsilon + iy_1 + \frac{a^2(x_1 - \varepsilon - iy_1)}{(x_1 - \varepsilon)^2 + y_1^2},$$

опуская индекс, находим, что

$$\eta = y \left(1 - \frac{a^2}{(x - \varepsilon)^2 + y^2} \right).$$

Таким образом ширина вихревой дорожки будет, с одной стороны, равна:

$$h = 2\eta = 2y \left(1 - \frac{a^2}{(x - \varepsilon)^2 + y^2} \right).$$

Полагая $x = \rho \cos \psi$, $y = \rho \sin \psi$, находим:

$$h = 2\rho \sin \psi \left[1 - \frac{a^2}{\rho^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi + \varepsilon^2} \right]$$

или сокращенно

$$h = 2\rho \sin \psi \cdot (1 - x^2), \quad (23)$$

где

$$x^2 = \frac{a^2}{\rho^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi + \varepsilon^2}.$$

Но, с другой стороны, мы будем считать ширину вихревой дорожки равной расстоянию между точками срыва, т. е.

$$h = 2 \sin \varphi_\tau \left(1 - \frac{a^2}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi_\tau + \varepsilon^2} \right). \quad (24)$$

Сравнивая (23) с (24), мы получаем первое соотношение между ρ , ψ и Γ для симметричных крыльев Чаплыгина в виде:

$$\sin \varphi_\tau \left[1 - \frac{a^2}{1 - 2\varepsilon \cos \varphi_\tau + \varepsilon^2} \right] = \rho \cdot \sin \psi (1 - x^2). \quad (25)$$

Для крыльев Жуковского нужно положить $a = 1 - \varepsilon$.

При конформном отображении области течения около кругового цилиндра с двумя вихрями z_1 и \bar{z}_1 в плоскость (ζ) , присоединенные внешние вихри перейдут в плоскости крыла в точки ζ_1 и $\bar{\zeta}_1$. Скорость вихря ζ_1 в плоскости крыла будет вычисляться по формуле:

$$u^*_1 - iv^*_1 = \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \right)_1 - \frac{i\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{(\zeta'')_1}{(\zeta')^2_1},$$

где u^*_1 и v^*_1 — компоненты скорости вихря ζ_1 по осям координат ξ и η , а

$$\frac{\zeta''_1}{\zeta'_1} = \frac{2a^2(z - \varepsilon)}{[(z - \varepsilon)^2 - a^2]^2} = \frac{2a^2 z_1}{(z_1^2 - a^2)^2}.$$

Так как

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z=z_1} = U_0 \left(1 - \frac{1}{z_1^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{z_1 - \frac{1}{z_1}} - \frac{1}{z_1 - \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 - \frac{1}{\bar{z}_1}} \right],$$

то, следовательно:

$$\begin{aligned} u_1 &= U_0 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\rho^2} \right) + \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \rho \sin \psi \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \psi} \right], \\ -v_1 &= U_0 \frac{\sin 2\psi}{\rho^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \rho \cos \psi \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} \right]. \end{aligned}$$

Положив

$$\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_1 = \alpha_1 + i\beta_1; \text{ и зная что } \frac{\zeta''}{\zeta'^2} = -\frac{2a^2 z_1}{(z_1^2 - a^2)^2},$$

легко найдем, что

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (\alpha_1 u - \beta_1 v) - \frac{\Gamma a^2}{2\pi} \cdot \frac{2(\rho \cos \psi - \varepsilon) p \cdot q - \rho \sin \psi (p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}; \\ v^* &= \frac{1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} (\alpha_1 v + \beta_1 u) + \frac{\Gamma a^2}{2\pi} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot p \cdot q + (\rho \cos \psi - \varepsilon)(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}. \end{aligned}$$

Но

$$\alpha_1 + i\beta_1 = 1 - \frac{a^2(\bar{z}_1 - \varepsilon)(\bar{z}_1 - \varepsilon)}{(z_1 - \varepsilon)(z_1 - \varepsilon)(\bar{z}_1 - \varepsilon)(\bar{z}_1 - \varepsilon)},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \frac{a^2(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi + \rho^2 \cos 2\psi)}{(\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi)^2} \\ \beta_1 &= 2a^2\rho \sin \psi \cdot \frac{\rho \cos \psi - \varepsilon}{(\rho^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi)^2} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Величины } p \text{ и } q \text{ равны со-} \\ \text{ответственно} \\ (\varepsilon^2 + \rho^2 \cos 2\psi - a^2 - 2\varepsilon\rho \cos \psi) \\ \text{и } (\rho^2 \sin 2\psi - 2\varepsilon\rho \sin \psi) \end{array} \right.$$

Будем опять считать, что скорость вихря ζ_1 направлена по оси $O\xi$, тогда $v^*_1 = 0$ и, следовательно,

$$\alpha_1 v + \beta_1 u + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdot \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot A = 0,$$

где

$$A = a^2 \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot p \cdot q + (\rho \cos \psi - \varepsilon)(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)^2}.$$

Полагая для сокращения

$$\Phi_1 = \rho \cos \psi \left[\frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} \right]$$

и

$$\Phi_2 = \rho \sin \psi \left[\frac{\rho^2 + 1}{1 + \rho^4 - 2\rho^2 \cos 2\psi} - \frac{1}{\rho^2 - 1} - \frac{1}{2\rho^2 \sin^2 \psi} \right],$$

получим:

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0} = \frac{\beta_1 \left(1 - \frac{\cos 2\psi}{\rho^2} \right) - \alpha_1 \frac{\sin 2\psi}{\rho^2}}{\alpha_1 \Phi_1 - \beta_1 \Phi_2 - A(x_1^2 + \beta_1^2)}. \quad (26)$$

Формула (26) дает второе соотношение между ρ , ψ и Γ .

Для того, чтобы получить третье соотношение между ρ , ψ и Γ , мы должны найти распределение скоростей по контуру крыла.

Как известно, скорость в любой точке плоскости дается формулой

$$\overline{U}_\zeta = u - iv = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}.$$

Квадрат модуля скорости на поверхности крыла, очевидно, будет:

$$U^2 = \left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{\overline{dw}}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{\overline{dz}}{d\zeta} \right)_{z=e^{i\varphi}}, \quad (27)$$

где $w(z)$ есть характеристическая функция течения около цилиндра $R=1$ с двумя внешними присоединенными вихрями.

Из предыдущего мы знаем, что

$$\left(\frac{dw}{dz} \cdot \frac{\overline{dw}}{dz} \right) = 4U_0^2 \sin^2 \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right],$$

где

$$R_1 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi + \psi)$$

и

$$R_2 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - \psi).$$

Из формулы конформной связи областей находим:

$$\left(\frac{d\zeta}{dz} \cdot \frac{\overline{d\zeta}}{dz} \right)_{z=e^{i\varphi}} = \frac{(a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}{m^2}. \quad (28)$$

Таким образом распределение скоростей для симметричного крыла типа С. А. Чаплыгина можно написать так:

$$U = 2U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot \rho^2 - 1}{R_1' R_2} \right] \cdot \frac{m}{\sqrt{(a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (29)$$

где

$$m = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \varphi.$$

Для крыла типа Жуковского получим из (29):

$$U_{\text{неж}} = 2U_0 \cdot \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right] \cdot \frac{m}{n}. \quad (30)$$

причем

$$n = \sqrt{\varepsilon^2 + (1 - 2\varepsilon) \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Для того, чтобы получить третье уравнение, связывающее основные неизвестные нашей задачи, напомним условие отрыва струй для симметричных крыльев. По предыдущему будем иметь:

$$\frac{U_{\varphi \text{ кр}}}{U_{\text{кр}}} = - \frac{2\pi}{(4,8)^2} \cdot \frac{S'_{\varphi}}{S},$$

где $U_{\text{кр}}$ есть скорость теоретического потока по контуру крыла,

$$\text{Но так как } U_{\text{кр}} = U_{\text{цпл}} \cdot \omega,$$

где

$$U_{\text{цпл}} = 2U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right],$$

а

$$\omega = \frac{m}{\sqrt{a^2 - m)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}},$$

то, очевидно,

$$\frac{U'_{\varphi \text{ кр}}}{U_{\text{кр}}} = \frac{U'_{\varphi \text{ цпл}}}{U_{\text{цпл}}} + \frac{\omega'_{\varphi}}{\omega}.$$

Простые вычисления дают здесь:

$$\frac{U'_{\varphi \text{ цпл}}}{U_{\text{цпл}}} = \operatorname{ctg} \varphi - \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right];$$

$$\frac{\omega'_{\varphi}}{\omega} = \frac{2\varepsilon \sin \varphi - 2m [a^2 \sin 2\varphi - (a^2 - m)\varepsilon \cdot \sin \varphi]}{m [4a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 - m)^2]}.$$

Таким образом, условие отрыва струй от поверхности крыла С. А. Чаплыгина при наличии двух внешних присоединенных вихрей можно написать в виде:

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg} \varphi - \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right] + \\ & + \frac{2\varepsilon \cdot \sin \varphi - 2m [a^2 \sin 2\varphi - (a^2 - m)\varepsilon \cdot \sin \varphi]}{m [4a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 - m)^2]} = - \frac{2\pi}{(4,8)^2} \cdot \frac{S'_{\varphi}}{S}, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot 2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1),$$

$$S = \int_{\pi}^{\varphi} \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{1}{m} \sqrt{(m - a^2)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

Если в уравнение (31) подставить вместо произвольного φ заданный из эксперимента угол отрыва, то мы получим соотношение, связывающее ρ , ψ и Γ . Это соотношение, вместе с уравнениями (25) и (26) позволяет подсчитать вихревое сопротивление крыльев Жуковского и Чаплыгина. Совершенно аналогично предыдущему мы можем вместо условия (31)

написать новое соотношение, задаваясь точкой минимума давлений. Так как в этой точке $U_{кр} \neq 0$ и $\omega \neq 0$, то

$$\frac{U'_{\varphi_{кр}}}{U_{кр}} = 0.$$

или, подставляя ранее вычисленные значения, будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi_m - \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi_m + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi_m - \psi)}{R_2} \right] = \\ = - \frac{2m [a^2 \sin 2\varphi_m - (a^2 - m) \varepsilon \sin \varphi_m] - 2\varepsilon \sin \varphi_m}{m [4a^2 \sin^2 \varphi_m + (a^2 - m)^2]}, \end{aligned} \quad (32)$$

где φ_m — есть угол на отображаемом единичном круге, для которого имеет место минимум давления реального потока.

Уравнения (25), (26) и (31) или (25), (26) и (32) определяют все элементы вихревой дорожки Кармана и проблема вихревого сопротивления может быть исследована до конца.

5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Цель нашей работы — дать метод подсчета вихревого сопротивления в условиях плоско-параллельного обтекания для простейших тел — достигнута. Единственный пункт работы представляется нам мало удовлетворительным: это невозможность без экспериментальных данных (угол отрыва, положение минимума давления) определить ρ , ψ и Γ . Но это сомнения теоретика. Мы надеемся, что практики не будут видеть в этом большой беды, ибо ведь все современные авторы теорий турбулентности обращаются систематически к опытным данным и тем самым делают свои исследования орудием практических работников.

Мы желаем указать, что метод, развиваемый в настоящей работе, позволяет решить некоторые дополнительные задачи.

1. После определения ρ , ψ и Γ из приводимых выше уравнений мы можем найти распределение скоростей и давлений по контурам наших теоретических профилей. Спрашивается: насколько полученная таким образом картина распределения давлений будет совпадать с экспериментом.

Из уравнения Бернулли легко получить, что

$$\frac{P - P_0}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 1 - \frac{U^2}{U_0^2}.$$

Для кругового цилиндра

$$\frac{U}{U_0} = 2 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right].$$

Для эллиптического цилиндра

$$\frac{U}{U_0} = 2 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + a^4 - 2a^2 \cos 2\varphi}}$$

Мы нашли ранее, что для кругового цилиндра

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0} = 0,800; \quad \rho = 1,62; \quad \psi \cong 38^\circ,$$

а для эллиптического цилиндра

$$\frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cong 0,111; \quad \rho = 1,045; \quad \psi \cong 28^\circ.$$

На фиг. 28 представлены результаты расчетов распределения давления для кругового цилиндра, а на фиг. 29 для эллиптического цилиндра. Сплошные жирные линии дают соответствующие экспериментальные данные (Линке для кругового цилиндра и Шубауэр для эллиптического).

Сравнение указывает, что теоретическая кривая хорошо совпадает с экспериментальной приблизительно до точки срыва струй. Следовательно, пользуясь одной экспериментальной точкой, можно восстановить по приводимым здесь формулам всю картину распределения давлений от передней критической точки до точки срыва струй.

2. Зная величину циркуляции вихрей дорожки Кармана, мы можем найти частоту схода вихрей и тем самым определить частоту возмущающей гидродинамической силы, которая, как нам кажется, является решающей для возникновения вибраций профиля при нулевой подъемной силе.

Найдем частоту схода вихрей для эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 3$.

$$\frac{a}{b} = 3.$$

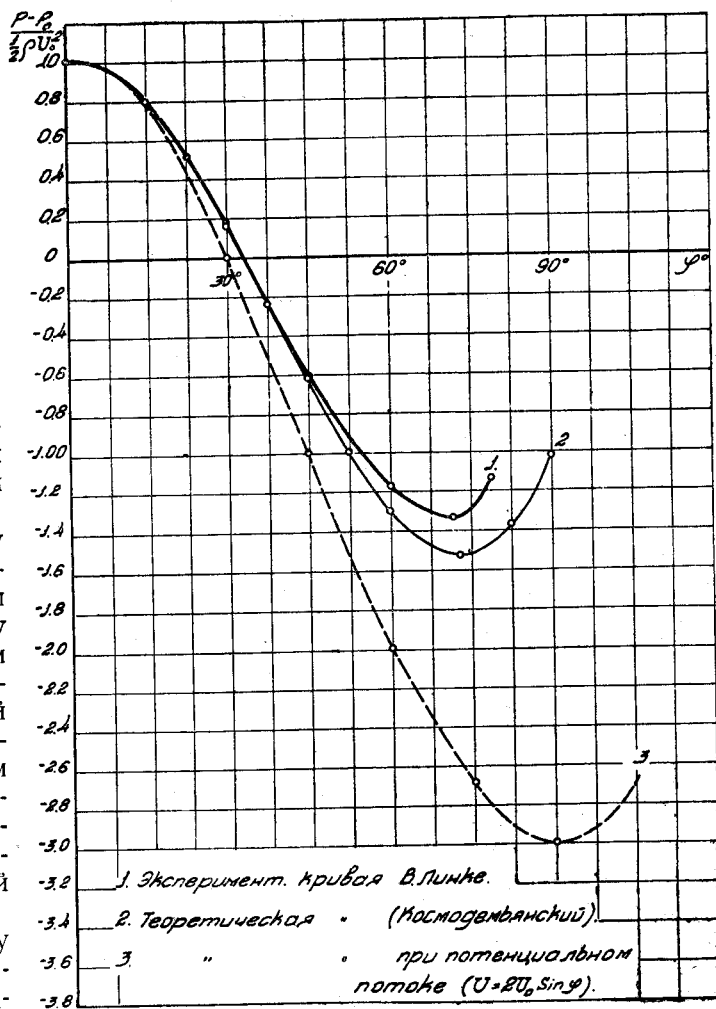
Как известно, период схода вихрей

$$T = \frac{l}{U - \bar{u}}.$$

Для эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 3$.

$l = 2,74$; $\bar{u} \cong 0,1 U_0$, следовательно,

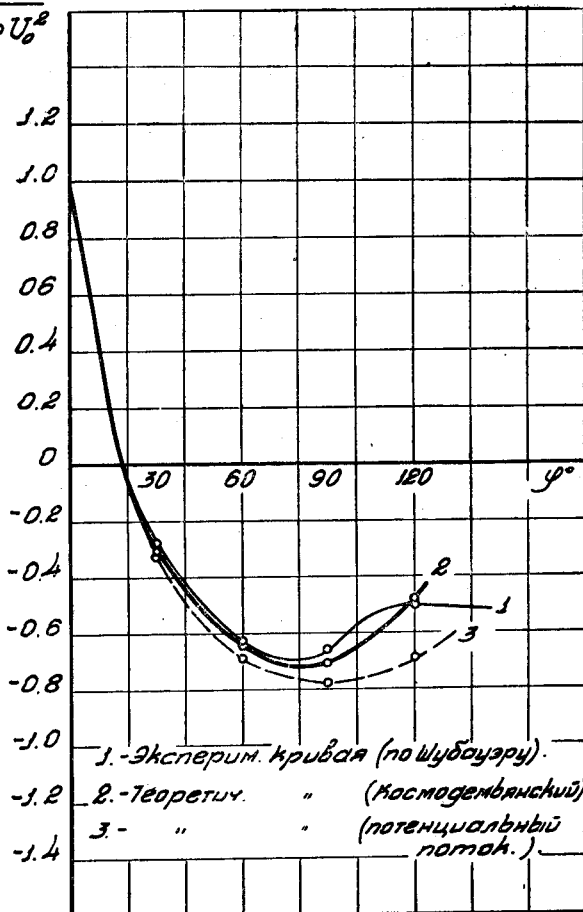
$$T = \frac{3,04}{U_0}.$$



Фиг. 28. Распределение давлений по контуру кругового цилиндра

Пусть мы в натуре имеем эллиптическую стойку, малая полуось которой равна 5 см, тогда $2b = 10$ см.

$$\frac{P-P_0}{\frac{1}{2}\rho U_0^2}$$



Фиг. 29. Распределение давлений по контуру эллиптического цилиндра ($\frac{a}{b} = 3$)

$U_1(x)$. Пользуясь формулами теории пограничного слоя, находим положение точки срыва струй x_1 в первом приближении. Зная точку срыва, строим новый потенциальный поток, находим соответствующее распределение скоростей U_2 по поверхности и вычисляем новое положение точки срыва струй x_2 . „Применяя несколько раз такое построение, найдем последовательность $x_1, x_2 \dots x_n$ и предполагая существование $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, что весьма вероятно, найдем действительное положение точки отрыва $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 1.

Нам представляется, что формулы, полученные выше, дают возможность по одной экспериментальной точке минимума давления найти U_2 , а затем и $x_2 = x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, так как распределение скоростей U_2 искусственного потока с двумя внешними присоединенными вихрями хорошо совпадает с экспериментальным распределением скоростей в области от передней критической точки до точки срыва струй, а эта область внешнего потока и определяет положение точки срыва.

1 В. В. Голубев. Исследования по теории разрезного крыла. Ч. I. Труды ЦАГИ, вып. 147. 1933.

Но

$$b = r_0(1 - \alpha^2),$$

где r_0 — радиус отображаемого круга, взятый нами за единицу масштаба.

В нашем случае $r_0 = 10$ см.

$$T = \frac{30,4 \text{ см}}{U_0}.$$

при скорости потока $U_0 = 6$ м/сек.

$$T \approx \frac{1}{20} \text{ сек.}$$

Для скорости 15 м/сек.

$$T = \frac{1}{50} \text{ сек.,}$$

т. е. в первом случае крыло будет совершать 20 колебаний в секунду, а во втором — 50.

3. В Трудах ЦАГИ, вып. 147, проф. В. В. Голубев высказал мысль, что определение положения точки срыва струй можно вести методом последовательных приближений, так: строим около данного контура потенциальный поток и находим распределение скоростей по поверхности

Следовательно, решение задачи В. В. Голубева можно провести так:
а) Строим потенциальный поток около данного контура и, пользуясь результатами теорий пограничного слоя, находим положение точки срыва струй x_1 . Расстояние между точками срыва полагаем равным расстоянию между двумя внешними присоединенными вихрями.

б) Строим потенциальный поток с парой внешних вихрей и на основании результатов настоящей работы находим полярные координаты присоединенных вихрей и их циркуляцию Γ .

в) Построенный поток № 2 дает распределение скоростей и давлений близкие к опытным, поэтому применив еще раз формулы для определения точки срыва мы находим истинную точку срыва реального потока около заданного контура.

Решим указанным путем задачу о нахождении точки срыва струй у эллиптического цилиндра с $\frac{a}{b} = 3$.

Первое приближение дает $\varphi_{\text{отр}} = 130^\circ$ на отображенном единичном круге.

Как было показано выше (см. стр. 35), распределение скоростей U_2 будет:

$$U_2 = 2 U_0 \sin \varphi \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot \frac{2\rho \sin \psi \cdot (\rho^2 - 1)}{R_1 R_2} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}}, \quad (1)$$

где

$$R_1 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi - \psi); \quad R_2 = 1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\varphi + \psi);$$

Величины ρ , ψ и Γ нам уже известны.

Напишем условие отрыва струй, пользуясь распределением скоростей вне пограничного слоя по второму приближению.

Будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4 \cdot 8)^2} \cdot \frac{S'_\varphi}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi} = \\ = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$B = \frac{\Gamma}{2\pi U_0} \cdot (\rho^2 - 1) \cdot 2\rho \sin \psi.$$

Уравнение (2) включает только одно неизвестное φ , угол отрыва по второму приближению. Мы решили указанное уравнение графически построив $Y_1(\varphi)$ и $Y_2(\varphi)$, где:

$$\begin{aligned} Y_1 = \operatorname{ctg} \varphi + \frac{2\pi}{(4 \cdot 8)^2} \cdot \frac{S'_\varphi}{S} - \frac{2\alpha^2 \sin 2\varphi}{1 + \alpha^4 - 2\alpha^2 \cos 2\varphi}; \\ Y_2 = \frac{2\rho B}{R_1 R_2 - B} \cdot \left[\frac{\sin(\varphi + \psi)}{R_1} + \frac{\sin(\varphi - \psi)}{R_2} \right] \end{aligned}$$

и нашли для $\frac{a}{b} = 3$ $\varphi_2 = 112^\circ$ (на отображенном единичном круге) вместо $\varphi = 110^\circ$ найденного из эксперимента.

Результат нужно признать вполне удовлетворительным, так как первое приближение давало ошибку в 10 раз большую.

Мы надеемся в самое ближайшее время дать способ решения этой задачи без экспериментальных точек минимума давления.

4. В журнале *Luftfahrtforschung* т. 12 за 1935 г. была помещена статья Бленка, Фукса, и Либерса¹ об определении частоты схода вихрей с кругового цилиндра, плоской пластинки и тонкого симметричного крыла.

Если обозначить через T — период схода вихрей, λ — частоту схода, то из предыдущего очевидно, что:

$$T = \frac{l}{U_0 - \bar{u}}; \quad \lambda = \frac{1}{T} = \frac{U_0(1-e)}{l}; \quad e = \frac{\bar{u}}{U_0}.$$

Образует безразмерное число:

$$K = \frac{\lambda \cdot 2b}{U_0} = \frac{2b(1-e)}{l},$$

где $2b$ — характеристический размер (например, диаметр цилиндра). Оказывается, что для кругового цилиндра $K = 0,22$. Ранее мы нашли, что для кругового цилиндра

$$\frac{\bar{u}}{U_0} = 0,24; \quad l = 7,14; \quad 2b = 2;$$

поэтому

$$K = \frac{2 \cdot (1 - 0,24)}{7,14} = 0,214,$$

т. е. весьма близко к опытному значению K .

Исследования Бленка, Фукса и Либерса показали, что безразмерный параметр K мало зависит от формы контура, но сильно изменяется в зависимости от угла атаки. Экспериментальные данные были, однако, получены только для углов атаки $\alpha > 10^\circ$, так как и плоская пластинка и тонкое симметричное крыло при нулевом угле атаки обтекаются без срыва струй.

Полученные выше (см. § 3) результаты для серии эллиптических цилиндров показывают сильную зависимость коэффициента K от формы (фиг. 30).

Действительно, элементарные вычисления дают здесь:

Если

$$\frac{a}{b} = 3 \quad K = 0,33 \quad \frac{a}{b} = 2 \quad K = 0,46$$

$$\frac{a}{b} = 4 \quad K = 0,368 \quad \frac{a}{b} = 9 \quad K = 0,51$$

Простые физические соображения показывают правильность полученного результата.

Ясно, что ширина вихревой дорожки быстрее стремится к нулю, нежели толщина $2b$ эллиптического цилиндра. Поэтому безразмерное число K должно возрастать с увеличением отношения $\frac{a}{b}$.

На фиг. 30 показано, что число $C = \frac{K}{\sqrt{\frac{a}{b}}}$ остается для серии эллиптических цилиндров приблизительно величиной постоянной.

Следовательно для $\alpha = 0^\circ$ величина K сильно зависит от формы тела.

¹ H. Blenk, D. Fuchs, F. Liebers. Über Messungen von Wirbelfrequenzen. *Luftfahrtforschung*. Bd. 12. S. 38—41. 1935.

Summary

The basic purpose of the paper is to compute the part of the total drag due to a regular eddy formation behind a body moving in air. The practical numerical calculations were chiefly carried out for a laminar flow though the developed formulae may be as well used for the case of a turbulent flow.

The author computes the eddy resistance of a circular cylinder in the laminar transition and turbulent regions of the flow and solves the problems of eddy resistance of a series of elliptical cylinders and a series of symmetrical aerofoils of the Joukovsky and Tchiapligutne type.

Since the developed method required an experimental determination of the minimum pressure point position (or the separation point), the author compared many experimental data and chose, as we consider, the most reliable ones. The suggested method of calculating the eddy resistance is based on the following three assumptions:

- α —The width of the wake behind a body is equal to the distance between the points of separation of streams.
- β —The velocity of a fully developed eddy (the eddy having a maximum circulation) behind a body is directed along the velocity direction of the undisturbed flow.
- γ —The position of the minimum pressure point of the real flow (or the separation point) is given.

At the end of the paper it is shown that using several results of the present investigation some additional problems may be solved.

For example it is possible:

1. To calculate the period of eddy formation on the contours investigated and thus to determine the frequency of the disturbing hydrodynamical force which is decisive in the arising of oscillations in the case of a zero lift.
2. Provided the position of the minimum pressure point is known to obtain a complete picture of pressure distribution over the front part of the contour up to the separation point.

The methods developed and outlined in the present paper are sufficiently correct and very simple. The author hopes that the obtained data would help the aviation engineers to obtain some useful information concerning the drag of theoretical aerofoils.

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие	3
1. Основные результаты теории Кармана	4
2. Лобовое сопротивление круглого цилиндра	11
а) ламинарный режим	11
б) турбулентный режим	26
3. Вихревое сопротивление эллиптических цилиндров	28
а) Построение потенциального потока	28
б) Определение положения точек срыва струй	29
с) Формулы для подсчета вихревого сопротивления	31
д) Результаты расчетов вихревого сопротивления по заданной точке срыва	38
е) Второй способ определения циркуляции	41
4. Вихревое сопротивление симметричных крыльев	43
а) Построение потенциального потока	43
б) Определение точек срыва струй	46
с) Формулы для подсчета вихревого сопротивления крыльев	48
5. Дополнительные замечания и общие выводы	52
6. Резюме (на английском языке)	57

